Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 17

Potenzreihen

Definition 17.1. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $x \in \mathbb{R}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man x variieren lässt und dann die Potenzreihe in einem *Konvergenzintervall* eine Funktion in x darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der 14ten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, die für $|x| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1-x)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die *Exponentialreihe*, die für jede reelle Zahl konvergiert und zur *reellen Exponentialfunktion* führt. Ihre Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus*.

Satz 17.2. *Es sei*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Potenzreihe und es gebe ein $x_0 \neq 0$ derart, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ konvergiere. Dann gibt es ein positives R (wobei $R = \infty$ erlaubt ist) derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$ die Reihe konvergiert. Auf einem solchen (offenen) Konvergenzintervall stellt die Potenzreihe $f(x)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Der Beweis beruht auf einer systematischen Untersuchung für Potenzreihen und dem Limes von Funktionenfolgen. Wir werden ihn nicht durchführen. □

Definition 17.3. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Auch für die folgende Aussage geben wir keinen Beweis.

Lemma 17.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = (\sum_{k=0}^{\infty} a_k) \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} b_k)\,.$$

Die Exponentialreihe und die Exponentialfunktion

Definition 17.5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

Dies ist also die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \ldots\,.$$

Satz 17.6. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

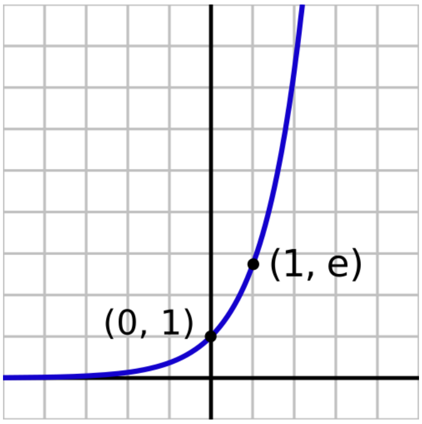
absolut konvergent.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. $\square$

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die reelle Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 17.7. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion*.

Satz 17.8. *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 17.4 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

Korollar 17.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

1. *Es ist* $\exp 0 = 1$.
2. *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp x \neq 0$.
3. *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
4. *Für jedes* x *ist* $\exp x \in \mathbb{R}_+$.
5. *Für* $x > 0$ *ist* $\exp x > 1$ *und für* $x < 0$ *ist* $\exp x < 1$.

(6) *Die reelle Exponentialfunktion ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp x \cdot \exp(-x) \;=\; \exp(x-x) \;=\; \exp 0 \;=\; 1$$

aufgrund von Satz 17.8. (3) folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 17.8 durch Induktion, und daraus wegen (2) auch für negatives n. (4). Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp x \;=\; \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) \;=\; \exp\frac{x}{2}\cdot\exp\frac{x}{2} \;=\; \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \;\geq\; 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \;=\; 1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots \;>\; 1,$$

da ja hinten nur positive Zahlen hinzuaddiert werden. (6). Für reelle $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher nach (5) $\exp(y-x) > 1$, also

$$\exp y \;=\; \exp(y-x+x) \;=\; \exp(y-x)\cdot\exp x \;>\; \exp x.$$

□

Mit der Exponentialreihe definieren wir die *eulersche Zahl*.

Definition 17.10. Die reelle Zahl

$$e := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

heißt *eulersche Zahl*.

Diese Zahl hat den Wert

$$e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots \cong 2,71\ldots.$$

Bemerkung 17.11. Für die eulersche Zahl gilt

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

so dass e auch als Grenzwert dieser Folge eingeführt werden kann. Die Konvergenz bei der Exponentialreihe ist aber deutlich schneller.

Statt $\exp x$ werden wir in Zukunft auch e^x schreiben.

Satz 17.12. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$*.*

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 17.2, da die Exponentialfunktion ja über eine Potenzreihe definiert ist. Nach Korollar 17.9 liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 17.9, woraus wegen Korollar 17.9, folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 17.9. □

Logarithmen

Definition 17.13. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist definiert als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.

Satz 17.14. *Der natürliche Logarithmus*

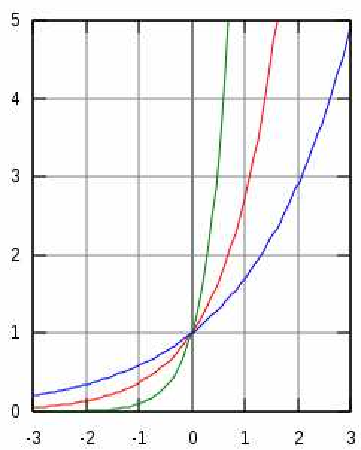
$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ *und* $\mathbb{R}$ *stiftet. Dabei gilt*

$$\ln (x \cdot y) \; = \; \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 17.8, Korollar 17.9, Satz 17.12 und Satz 16.4. □



Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 17.15. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis* b als

$$b^x := \exp (x \ln b) \,.$$

Satz 17.16. *Für die Exponentialfunktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x,$$

gelten die folgenden Rechenregeln (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.7. □

Bemerkung 17.17. Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ zur Basis $a > 0$ kann man auch anders einführen. Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ nimmt man das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also a^n, als Definition. Für eine negative ganze Zahl x setzt man $a^x := (a^{-x})^{-1}$. Für eine positive rationale Zahl $x = r/s$ setzt man

$$a^x := \sqrt[s]{a^r}\,,$$

wobei man natürlich die Unabhängigkeit von der gewählten Bruchdarstellung beweisen muss. Für eine negative rationale Zahl arbeitet man wieder mit Inversen. Für eine beliebige reelle Zahl x schließlich nimmt man eine Folge q_n von rationalen Zahlen, die gegen x konvergiert, und definiert

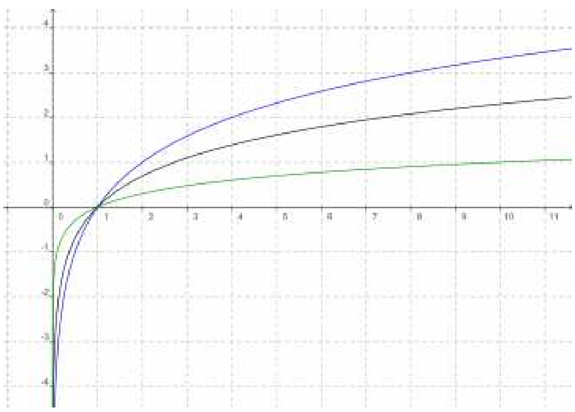
$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n}\,.$$

Hierzu muss man zeigen, dass diese Limiten existieren und unabhängig von der gewählten rationalen Folge sind. Für den Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ ist der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit entscheidend.

Definition 17.18. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ wird der *Logarithmus zur Basis b* durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 17.19. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$*, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.*
(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*

$$\log_a y \; = \; \log_a(b^{\log_b y}) \; = \; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 17.8. □

Abbildungsverzeichnis