Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2008/2009**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 11

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Skizziere die Graphen der Funktionen x und y auf $V(xy)$. Man mache sich klar, dass das Produkt xy die Nullfunktion ist.

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Bestimme zu den folgenden Teilmengen der affinen Ebenen $\mathbb{A}_K^2$ den Zariski-Abschluss.

(1) $\{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$
(2) $\{(\cos(x), \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$
(3) $\{(x, x^3) : 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}$
(4) $\{(x, x^3) : 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}\}$
(5) $\{(x, x^3) : 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Z}/(5)\}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $F \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ und sei $U \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ eine Teilmenge, die in der metrischen Topologie offen und nicht leer sei. Es sei $F|_U = 0$ die Nullfunktion. Zeige, dass dann F das Nullpolynom ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K[X_1, \ldots, X_n]$ zwei Radikalideale. Zeige, dass die Nullstellengebilde $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ genau dann affin-linear äquivalent sind, wenn es eine affin-lineare Variablentransformation gibt, die die beiden Ideale ineinander überführt.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Beweise Korollar 11.3 direkt aus Satz 10.10.

Aufgabe 6. (7 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, und R der Polynomring in n Variablen über K. Wir wollen einen alternativen Beweis einsehen, dass $\operatorname{Id}(V(J)) = \operatorname{rad}(J)$ für jedes Ideal J in R ist, der auf Korollar 11.3 aufbaut. Sei $f \in \operatorname{Id}(V(J))$. Betrachten Sie den Ring $R[T]$ und zeigen Sie, dass das Ideal

$$J' = (J, 1 - f \cdot T)$$

trivial ist. Schließen Sie daraus, indem Sie T geeignet spezialisieren, dass f im Radikal von J liegt.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ und betrachte die dadurch definierte polynomiale Abbildung

$$\varphi : \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^{n+1},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)),$$

die eine Bijektion des affinen Raumes mit dem Graph von φ definiert. Zu einer affin-algebraischen Menge $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ betrachten wir das Bild $V' = \varphi(V)$. Zeige, dass V' ebenfalls affin-algebraisch ist und gebe ein beschreibendes Ideal an. Zeige, dass V genau dann irreduzibel ist, wenn V' irreduzibel ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $V, W \subseteq \mathbb{A}_K^n$ seien zwei affin-algebraische Mengen. Es sei $V \subseteq W$ vorausgesetzt. Man definiere einen K-Algebra-Homomorphismus zwischen den beiden Koordinatenringen $R(V)$ und $R(W)$ und beschreibe dessen wichtigste Eigenschaft. Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Mengen, die nicht ineinander enthalten sind, wo aber die Koordiantenringe isomorph sind.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Betrachte die Hyperbel $V(xy - 1)$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/(11)$. Bestimme das Inverse von $4x^3$ im zugehörigen Koordinatenring.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden algebraischen Kurven

$$V(x^2 + y^2 - 2) \text{ und } V(x^2 + 2y^2 - 1)$$

über dem Körper $\mathbb{Z}/(7)$. Zeige, dass der Durchschnitt leer ist, und finde einen Erweiterungskörper $K \supseteq \mathbb{Z}/(7)$, über dem der Durchschnitt nicht leer ist. Berechne alle Punkte im Durchschnitt über K und über jedem anderen Erweiterungskörper. Man beschreibe auch den Koordinatenring des Durchschnitts.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei f_j, $j \in J$, eine Familie von Elementen in R. Es sei angenommen, dass die f_j zusammen das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass es dann bereits eine endliche Teilfamilie f_j, $j \in J_0 \subseteq J$ gibt, die ebenfalls das Einheitsideal erzeugt.