Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 2

Wir beginnen mit ein paar Aufwärmaufgaben, die nicht abzugeben sind.

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

Aufgabe 2. Beweise das folgende „Untergruppenkriterium“. Eine nichtleere Teilmenge $H \subseteq G$ einer Gruppe G ist genau dann eine Untergruppe, wenn gilt:

$$\text{für alle } g, h \in H \text{ ist } gh^{-1} \in H\,.$$

Aufgabe 3. Man bringe für die Symmetrien am Würfel die Begriffe „Drehachse“, „Eigenvektor“ und „Eigenwert“ in Verbindung. Welche Eigenwerte können auftreten?

Aufgabe 4. Man gebe ein Beispiel eines endlichen Monoids M und eines Elementes $m \in M$ derart, dass alle positiven Potenzen von m vom neutralen Element verschieden sind.

Es folgen die Aufgaben, die man abgeben darf.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Man bestimme für jede natürliche Zahl, wie viele eigentliche Würfelsymmetrien es gibt, die diese Zahl als Ordnung besitzen. Man gebe für jede Zahl, die als Ordnung einer eigentlichen Würfelsymmetrie auftritt, eine Matrixdarstellung einer Symmetrie an, die diese Ordnung besitzt.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Es sei M ein endliches Monoid. Es gelte die folgende „Kürzungsregel“: aus $ax = ay$ folgt $x = y$. Zeige, dass M eine Gruppe ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung zwei hat, d.h. für jedes Gruppenelement g gilt $g^2 = e$. Man zeige, dass die Gruppe G dann abelsch ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Es gebe ein *linksneutrales Element* e (d.h. $ex = x$ für alle $x \in G$) und zu jedem $x \in G$ gebe es ein *Linksinverses*, d.h. ein Element y mit $yx = e$. Zeige, dass dann M schon eine Gruppe ist. (Bemerkung: häufig wird eine Gruppe durch diese Eigenschaften definiert.)

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Betrachte die Gruppe der Bewegungen an einem Würfel W. Es sei φ eine Vierteldrehung um eine Seitenmittelpunktachse, β sei eine Halbdrehung um dieselbe Seitenmittelpunktachse, ψ sei eine Dritteldrehung um eine Diagonalachse und θ eine Halbdrehung um eine Kantenmittelpunktachse. Wie viele Elemente besitzen die von je zwei Elementen erzeugten Untergruppen?

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Es seien φ und ψ Bewegungen am Würfel. Zeige, dass die Drehachse von φ und die Drehachse von ψ *nicht* die Drehachse der Komposition $\varphi \circ \psi$ bestimmen. (Man gebe ein Beispiel, in dem die Identität nicht vorkommt.)

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und betrachte auf

$$\mathbb{Z}/(n) = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

die Verknüpfung

$$a + b := (a + b) \mod n = \begin{cases} a + b \text{ falls } a + b < n \\ a + b - n \text{ falls } a + b \geq n\,. \end{cases}$$

Zeige, dass dadurch eine assoziative Verknüpfung auf dieser Menge definiert ist, und dass damit sogar eine Gruppe vorliegt.

Aufgabe 12. (2 Punkte)

Betrachte die Gruppe der Drehungen am Kreis um Vielfache des Winkels $\alpha = 360/12 = 30$ Grad. Welche Drehungen sind Erzeuger dieser Gruppe?

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Bundesarchiv Bild 183-10308-0006, Calbe, DS-Sportschule, Lehrgang für Sportler.jpg, Autor = Benutzer auf Deutsches Bundesarchiv, Lizenz = 1