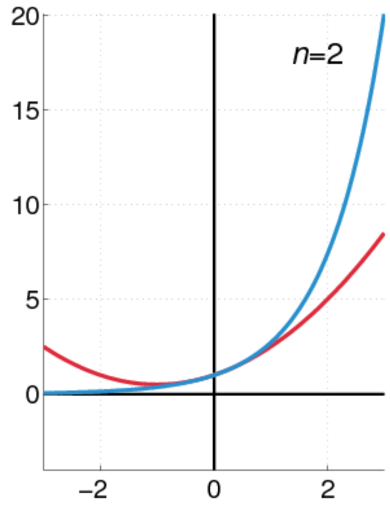
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 26

Funktionenfolgen



Eine (gestauchte) Darstellung der ersten zwei polynomialen Approximationen der reellen Exponentialfunktion.

Wir haben das letzte Mal gesehen, dass die Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ stellt also die Polynomfunktion

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots + \frac{z^n}{n!}$$

eine „approximierende Funktion" für die Exponentialfunktion dar. Dabei ist allerdings die Güte der Approximation abhängig von z. In dieser Vorlesung werden verschiedene Konzepte vorstellen, wie man eine Funktion als Grenzfunktion einer Funktionenfolge auffassen kann. Eine unmittelbare Anwendung wird sein, dass die Exponentialfunktion stetig ist.

Definition 26.1. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n : T \longrightarrow M,$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *punktweise konvergiert*, wenn für jedes $x \in T$ die Folge

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert.

Wenn eine punktweise konvergente Funktionenfolge vorliegt, so wird durch

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

eine sogenannte *Grenzfunktion* $f : T \to M$ definiert. Selbst wenn sämtliche Funktionen stetig sind, muss diese Grenzfunktion nicht stetig sein. Dazu braucht man einen stärkeren Konvergenzbegriff.

Definition 26.2. Es sei T eine Menge, M ein metrischer Raum und

$$f_n : T \longrightarrow M,$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von Funktionen. Man sagt, dass die Funktionenfolge *gleichmäßig konvergiert*, wenn es eine Funktion

$$f : T \longrightarrow M$$

gibt derart, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in T\,.$$

Beispiel 26.3. Es sei $T = [0,1]$ und

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n.$$

Für jedes $x \in [0,1]$, $x < 0$, konvergiert die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 und für $x = 1$ liegt die konstante Folge zum Wert 1 vor. Die Grenzfunktion ist also

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1\,, \\ 1 \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig, obwohl alle f_n stetig sind.

Lemma 26.4. *Es seien L und M metrische Räume und es seien*

$$f_n : L \longrightarrow M$$

stetige Funktionen, die gleichmäßig gegen die Funktion f konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis. Sei $x \in L$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein n_0 mit $d(f_n(y), f(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $n \geq n_0$ und alle $y \in L$. Wegen der Stetigkeit von f_{n_0} in x gibt es ein $\delta > 0$ mit $d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) \leq \epsilon/3$ für alle $y \in L$ mit $d(x,y) \leq \delta$. Für diese y gilt somit

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) + d(f_{n_0}(y), f(y)) \\ &\leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Das Konvergenzkriterium von Weierstraß

Definition 26.5. Es sei T eine Menge und

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$|| f ||:=|| f ||_T = \sup \left(| f(x) |, x \in T \right)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Die folgende Aussage heißt das *Konvergenzkriterium von Weierstraß*. Es geht darin um Funktionenfolgen f_n, die als Partialsummen $f_n = \sum_{k=0}^n g_k$ von Funktionen g_k gegeben sind, wie dies auch bei Potenzreihen der Fall ist.

Satz 26.6. *(Konvergenzkriterium von Weierstraß)*

Es sei T eine Menge und sei

$$g_k : T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktionenfolge mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} || g_k ||< \infty \, .$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^\infty g_k$ (also die Funktionenfolge $f_n = \sum_{k=0}^n g_k$) gleichmäßig und punktweise absolut gegen eine Funktion

$$f : T \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis. Sei $x \in T$. Wegen $| g_k(x) | \leq || g_k ||$ ist aufgrund des Majorantenkriteriums die Reihe $\sum_{k=0}^\infty | g_k(x) |$ absolut konvergent, und das bedeutet, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^\infty g_k$ punktweise absolut konvergiert. Wir setzen $f_n(x) := \sum_{k=0}^n g_k(x)$. und

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \, .$$

Wir wollen zeigen, dass die Funktionenfolge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Aufgrund des Cauchy-Kriteriums für Reihen gibt es ein n_0 mit

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} || g_k || \leq \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Damit haben wir für $n \geq n_0$ insgesamt die Abschätzung

$$| f_n(x) - f(x) | = | \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} | g_k(x) | \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} || g_k || \leq \epsilon.$$

$\square$

Konvergenz von Potenzreihen

Es seien c_n, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Funktionenfolge f_n mit

$$f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sum_{k=0}^{n} c_k (z-a)^k .$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist dies eine Potenzreihe in $z-a$. Im Folgenden werden wir auch die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ mit variablem z als Potenzreihe bezeichnen. Dabei heißt a der *Entwicklungspunkt der Potenzreihe*. Im Allgemeinen konvergiert diese Funktionenreihe weder punktweise auf ganz $\mathbb{C}$ noch gleichmäßig. Wir werden aber sehen, dass häufig auf geeigneten Teilmengen $T \subseteq \mathbb{C}$ gleichmäßige Konvergenz vorliegt.

Lemma 26.7. *Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

sei für eine komplexe Zahl $z = b$, $b \neq a$, konvergent. Dann ist für jeden reellen Radius r mit $0 < r < \mid b-a \mid$ die Potenzreihe $f(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,r)$ punktweise absolut und gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir werden Satz 26.6 auf $T = B(a,r)$ anwenden. Wegen der Konvergenz für $z = b$ sind die Summanden $c_n(b-a)^n$ nach Lemma 24.4 eine Nullfolge, d.h. es gibt insbesondere ein $M > 0$ mit

$$\mid c_n (b-a)^n \mid \leq M$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gelten für jedes $z \in B(a,r)$ die Abschätzungen

$$\mid c_n(z-a)^n \mid = \mid c_n(b-a)^n \mid \cdot \mid \frac{z-a}{b-a} \mid^n \leq M \cdot \mid \frac{z-a}{b-a} \mid^n \leq M (\frac{r}{\mid b-a \mid})^n .$$

Dabei ist nach Voraussetzung $\frac{r}{|b-a|} < 1$. Daher liegen rechts die Summanden einer nach Satz 24.11 konvergenten geometrische Reihe vor. Deren Grenzwert liefert eine obere Schranke für die Reihe der Supremumsnormen. □

Definition 26.8. Für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

heißt

$$\sup \left(\mid b-a \mid, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (b-a)^n \text{ konvergiert} \right)$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Das ist eine nichtnegative reelle Zahl oder $= \infty$.

Jede Potenzreihe hat also grundsätzlich das gleiche Konvergenzverhalten: Es gibt eine Kreischeibe (die eben durch den Konvergenzradius bestimmt ist, wobei die Extremfälle $r = 0$ und $r = \infty$ erlaubt sind) um den Entwicklungspunkt, in deren Innerem die Potenzreihe konvergiert und so, dass sie außerhalb davon in keinem Punkt konvergiert. Nur auf dem Rand der Kreisscheibe kann alles mögliche passieren. Der Fall $r = 0$ ist nicht sehr interessant. Bei positivem Konvergenzradius (einschließlich dem Fall $r = \infty$) sagt man auch, dass die Potenzreihe konvergiert.

Korollar 26.9. *Es sei*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius r. Dann stellt die Potenzreihe $f(z)$ auf der offenen Kreisscheibe $U(a,r)$ eine stetige Funktion dar.

Beweis. Jeder Punkt $z \in U(a,r)$ liegt im Innern einer abgeschlossenen Kreisscheibe $B(a,s) \subseteq U(a,r)$ mit $s < r$. Auf dieser abgeschlossenen Kreisscheibe ist die Potenzreihe nach Lemma 26.7 gleichmäßig konvergent, daher ist nach Lemma 26.4 die Grenzfunktion stetig. □

Korollar 26.10. *Die Exponentialreihe und die trigonometrischen Reihen Sinus und Kosinus besitzen einen unendlichen Konvergenzradius, und die komplexe Exponentialfunktion, die komplexe Sinusfunktion und die komplexe Kosinusfunktion sind stetig.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.6 und Korollar 26.9. □

Korollar 26.11. *Für die (durch die Exponentialreihe definierte) reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

gilt

$$\exp x = (\exp 1)^x .$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 25.8, aus Korollar 26.10 und aus Aufgabe 23.10. □

Die reelle Zahl $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$ stimmt mit der als $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ eingeführten *eulerschen Zahl* überein, was wir aber noch nicht bewiesen haben. Aufgrund dieses Sachverhaltes und der vorstehenden Aussage schreiben wir häufig $e^z = \exp z$, und zwar auch für komplexe Argumente.

Rechenregeln für Potenzreihen

Satz 26.12. *(Entwicklungssatz)*
Es sei

$$f=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$ und sei $b \in U(a,R)$. Dann gibt es ein konvergente Potenzreihe

$$h=\sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i$$

mit Entwicklungspunkt b und mit einem Konvergenzradius $s \geq R- \mid a-b \mid > 0$ derart, dass die durch diese beiden Potenzreihen dargestellten Funktionen auf $U(b,s)$ übereinstimmen. Die Koeffizienten von h sind

$$d_i=\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n (b-a)^{n-i}$$

und insbesondere ist

$$d_1=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (b-a)^{n-1} .$$

Beweis. Zur Notationsvereinfachung sei $a=0$, $b \in U(0,R)$ und $z \in U(b, R- \mid b \mid)$. Wir betrachten die Familie

$$x_{ni} = c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i},\, n \in \mathbb{N},\, i \in \{0,\ldots,n\} .$$

Wir zeigen zuerst, dass diese Familie summierbar ist. Dies folgt aus der Abschätzung (unter Verwendung von Aufgabe 24.19)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0,\ldots,N,\, i=0,\ldots,n} \mid c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \mid &= \sum_{n=0}^{N} \mid c_n \mid \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mid z-b \mid^i \mid b \mid^{n-i}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N} \mid c_n \mid (\mid z-b \mid + \mid b \mid)^n\end{aligned}$$

und daraus, dass wegen $\mid z-b \mid + \mid b \mid < R$ die rechte Seite für beliebiges N beschränkt ist. Wegen der Summierbarkeit gelten aufgrund des großen Umordnungssatzes die Gleichungen

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n ((z-b)+b)^n\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i}\Big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N},\, i=0,\ldots,n} c_n \binom{n}{i} (z-b)^i b^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} c_n b^{n-i}\Big)(z-b)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} d_i (z-b)^i.
\end{aligned}
$$

□

Abbildungsverzeichnis