Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 86

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 86.1. Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n,$$

eine Linearform. Es sei M der Graph dieser Funktion, den wir als riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Zeige, dass zwischen den Volumina entsprechender Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und des Graphen eine konstante Beziehung besteht.

Aufgabe 86.2. Diskutiere die Rotationsfläche S zu

$$M = \{(\sin \frac{1}{y}, y) | \, y > 0\}$$

um die x-Achse A. Ist S eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3 \setminus A$? Ist die Menge S abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$? Ist der Abschluss von S in $\mathbb{R}^3$ eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 86.3. Bestätige, dass die in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 angegebenen Abbildungen ihr Bild auf der Einheitssphäre haben und bis auf eine Nullmenge surjektiv sind.

Aufgabe 86.4. Bestimme die (partiell definierten) Umkehrabbildungen zu den in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 angegebenen Abbildungen.

Aufgabe 86.5. Zeige, dass Längenkreise und Breitenkreise auf der Erdkugel senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 86.6. Wie lange ist der 30-ste Breitenkreis auf der Erde (man setze den Erdradius mit 6370 km an).

Aufgabe 86.7. Bestimme das Infimum und das Supremum der Länge der Bilder der Großkreise auf der in Beispiel 86.5 beschriebenen Karte.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 86.8. (5 Punkte)

Wir betrachten den Graph M der Funktion

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto y + x^2,$$

als riemannsche Mannigfaltigkeit. Berechne den Flächeninhalt des Graphen oberhalb des Quadrats $[-1,1] \times [-1,1]$.

Aufgabe 86.9. (5 Punkte)

Es sei

$$M = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

die Parabel, also der Graph der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Zeige, dass die zugehörige Rotationsfläche um die x-Achse keine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 86.10. (4 Punkte)

Man stelle eine Kugeloberfläche als Rotationsfläche dar und berechne damit den Inhalt der Kugeloberfläche.

Aufgabe 86.11. (4 Punkte)

Man stelle einen Torus als Rotationsfläche dar und berechne damit seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 86.12. (6 Punkte)

Bestimme den „Abstand“ zwischen Osnabrück und Bangalore (den Erdradius mit 6370 km ansetzen) in den beiden folgenden Sinnen.

a) Entlang der Erdoberfläche (Luftlinie).

b) Durch die Erde (Maulwurfslinie).

Aufgabe 86.13. (6 Punkte)

Wie lange ist das Bild des 30-sten Breitenkreises auf den in Beispiel 86.5, Beispiel 86.6 und Beispiel 86.7 beschriebenen Karten (man setze den Erdradius mit 6370 km an)?