Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 46

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 46.1. Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3.$$

Aufgabe 46.2. Seien $a,b \in \mathbb{N}$. Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^ay^b.$$

Aufgabe 46.3. Berechne für die Addition

$$+\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x+y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x\cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 46.4. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(xy-2y^3+5,\ x^3-xy^2+y\right),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4,-3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.5. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xy-zy+2z^2,\ \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,-1,\pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2,0,5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.6. Sei $\varphi\colon V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 46.7. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine total differenzierbare Abbildung mit $(D\varphi)_P = 0$ für alle $P \in V$. Zeige, dass φ konstant ist.

Aufgabe 46.8. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi\colon G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P \,=\, a(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 46.9. Seien V, W_1 und W_2 drei endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume.

(1) Seien $L_1\colon V \to W_1$ und $L_2\colon V \to W_2$ zwei $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung
$$L_1 \times L_2\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\, v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$
$\mathbb{R}$-linear ist.

(2) Seien $f_1\colon V \to W_1$ und $f_2\colon V \to W_2$ zwei im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung
$$f = (f_1 \times f_2)\colon V \longrightarrow W_1 \times W_2,\, Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$
im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential
$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P\,.$$

Aufgabe 46.10. Es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes, $a \in M$ ein Berührpunkt von T,

$$g\colon T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum und $b \in L$. Zeige, dass für den Limes

$$\lim_{x \to a} g(x) = b$$

genau dann gilt, wenn

$$\lim_{x \to a} \,||\, g(x) - b \,||= 0$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.11. (4 Punkte)

a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x,y) \longmapsto (x+y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1,-7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 46.12. (4 Punkte)

Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det:\ \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2,3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 46.13. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 46.14. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi\colon\ V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

ist für alle $P \in V$.

Aufgabe 46.15. (5 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 46.16. (4 Punkte)

Seien $f_1, \ldots, f_n$ stetig differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Zusatzaufgabe zur Fußball-EM

Die folgende Aufgabe kann bis zum Ende der EM abgegeben werden. Die zu erreichende Punktezahl ist gleich der Anzahl der Tore, die Deutschland bei dem Turnier (in den regulären Spielzeiten) schießt.

Aufgabe 46.17. Beweise die folgende Aussage:

Zu Beginn eines Fußballspiels liegt der Fußball auf dem Anstoßpunkt. Wenn ein Tor erzielt wird, so wird der Ball wieder auf den Anstoßpunkt zurückgesetzt. In dieser Situation gilt: Es gibt mindestens zwei (gegenüber liegende) Punkte auf dem Fußball (seiner Oberfläche), die beim Neuanstoß genau dort liegen, wo sie am Spielanstoß lagen. Die Gesamtbewegung des Balles lässt sich durch eine Achsendrehung realisieren.