

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 2

AUFGABE 2.1. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term

$$f\alpha g x \alpha c_2 f \beta g y \alpha c_1 g f z \beta g c_1 f c_1$$

wie in Beispiel 2.6.

AUFGABE 2.2. Wir betrachten die arithmetische Grundtermmenge, die aus den Konstanten 0 und 1, den Variablen x_n $n \in \mathbb{N}$, dem einstelligen Funktionssymbol N und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen α und μ besteht. Entscheide, ob die folgenden Wörter über diesem Termalphabet Terme sind oder nicht.

- (1) $NNNNNNN01$,
- (2) $NNNNNNx_1NNNNNNNNNNNNx_2$,
- (3) $\alpha NNNNNN0NNNNNNNNNNNN1$,
- (4) $NNN\mu NNN\mu 0NNNNNNNNNNNN1$,
- (5) $\mu\alpha\mu\alpha\mu\alpha 0101010$,
- (6) $\alpha\alpha N x_1 N x_2 x_3 x_4 x_3$.

Schreibe diejenigen Wörter, die Terme sind, mit Klammern, ι , $+$ und \cdot .

AUFGABE 2.3. Es sei G eine Grundtermmenge und $t \in T(G)$ ein G -Term. Es sei u das am weitesten links stehende Symbol von t und v das am weitesten rechts stehende Symbol von t . Zeige die folgenden Eigenschaften.

- (1) Wenn u eine Variable oder eine Konstante ist, so ist $t = u$.
- (2) v ist eine Variable oder eine Konstante.
- (3) Wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist $t_1 t_2$ kein Term.

AUFGABE 2.4. Es sei G eine Grundtermmenge und t ein G -Term. Es sei n die Gesamtzahl der Variablen und Konstanten in t , wobei mehrfaches Vorkommen auch mehrfach gezählt wird. Es sei k die Summe über alle Stelligkeiten der in t vorkommenden Funktionssymbolen, wobei wiederum mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach gezählt werden.

- (1) Bestimme n und k im Term

$$ggxyhfxfzgyfy,$$

wobei f einstellig, g zweistellig und h dreistellig sei.

2

- (2) Es sei t weder eine Variable noch eine Konstante. Zeige $k \geq n$.
- (3) Zeige, dass die Differenz $n - k$ beliebig groß sein kann.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff abzählbar.

AUFGABE 2.5. Es sei A ein abzählbares Alphabet. Zeige, dass auch die Menge A^* der Wörter über A abzählbar ist.