Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Fundamentalgruppe und Vektorbündel

Vorlesung 3

Zu einem $\mathbb{K}$-Vektorbündel $p : E \to X$ auf einem topologischen Raum X und einem stetigen Weg

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$$

mit $\gamma(0) = x$ und einem Punkt $e \in E_x = p^{-1}(x)$ gibt es im Allgemeinen keine wohldefinierte eindeutige Liftung

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow E$$

mit $\tilde{\gamma}(0) = e$. Um dies sicherzustellen braucht man eine zusätzliche „horizontale“ oder „parallele Struktur“ auf E, die die „Basisrichtungen“ in x zu Richtungen in e liftet. In dieser Vorlesung besprechen wir im differentialgeometrischen Kontext, wie man Vektorbündel mit linearen Darstellungen der topologischen Fundamentalgruppe von X in Zusammenhang bringen kann.

Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Es sei X eine (reell- oder komplex-) differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$p : E \longrightarrow X$$

ein Vektorbündel über X, das wir ebenfalls als eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ansetzen. Die Tangentialabbildung ist eine Abbildung

$$Tp : TE \longrightarrow TX$$

bzw. eine Bündelabbildung

$$Tp : TE \longrightarrow p^*TX$$

von Vektorbündeln auf E. Für jeden Punkt $e \in E$ mit Basispunkt $x = p(e)$ liegt also eine lineare Abbildung

$$T_eE \longrightarrow T_xX$$

vor. Diese ist natürlich surjektiv: Für eine offene Menge $U \subseteq M$, über der E trivialisiert, also die Gestalt $E|_U \cong U \times W$ mit einem $\mathbb{K}$-Vektorraum W hat, ist

$$T(E|_U) = T(U \times W) = TU \times TW = TU \times W \times W,$$

und die Tangentialabbildung ist dabei die Projektion auf TU.

Das Kernbündel des surjektiven Bündelhomomorphismus

$$TE \longrightarrow p^*TX$$

heißt *Vertikalbündel*, das wir mit V bezeichnen. Es liegt also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow TE \longrightarrow p^*TX \longrightarrow 0\,.$$

Dabei hat man eine Bündelisomorphie $V \cong p^*E = E \oplus E$, wie ebenfalls aus der lokalen Beschreibung folgt.

Wenn E das triviale Bündel ist, also $E = X \times \mathbb{K}^r$, so gibt es eine direkte Zerlegung $TE = V \oplus p^*TX$. Für jeden Punkt $e \in E$ repräsentieren dann die Tangentialvektoren $t \in V$ die vertikalen Richtungen und $t \in p^*T_xX$ die „horizontalen Richtungen". Für jedes Vektorbündel kann man lokal mit Hilfe von Trivialisierungen den Tangentialraum T_eE in die direkte Summe aus vertikalem Raum und horizontalem Raum zerlegen. Allerdings hängen die horizontalen Unterräume wesentlich von der gewählten Trivialisierung ab und lassen sich nicht ohne Weiteres (im Gegensatz zu den vertikalen Unterräumen, die zusammen das Vertikalbündel bilden) zu einem Unterbündel zusammenfassen. Die Existenz eines solchen Bündels wird durch den Begriff des Zusammenhangs beschrieben.

Definition 3.1. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X. Unter einem *Zusammenhang* auf E versteht man eine direkte Summenzerlegung des Tangentialbündels $TE = V \oplus H$ in zwei Untervektorbündel V und H, wobei $V \subseteq TE$ das Vertikalbündel ist. Das Unterbündel $H \subseteq TE$ nennt man das *Horizontalbündel.*

Gemäß dieser Definition ist also ein Zusammenhang nichts anderes als ein zum Vertikalbündel komplementäres Unterbündel des Tangentialbündels. Es gibt einige inhaltlich äquivalente Beschreibungen eines Zusamenhangs. Ein Zusammenhang ist äquivalent zu einem Bündelhomomorphismus

$$\pi_V : TE \longrightarrow V$$

mit $\pi_V \circ \iota = \mathrm{id}_V$, wobei ι die Einbettung von V in TE bezeichne. Das horizontale Bündel ist dann der Kern von π_V, und umgekehrt liefert die Summenzerlegung eine Projektion auf die beiden Summanden.

Definition 3.2. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem Zusammenhang versehen sei. Es sei T eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\psi : Z \longrightarrow X$$

eine differenzierbare Abbildung. Ein differenzierbarer Schnitt

$$s : Z \longrightarrow E$$

(über ψ) heißt *horizontal*, wenn für jeden Punkt $z \in Z$ das Bild $T(s)(T_zZ)$ ganz im Horizontalbündel $H_{s(z)} \subseteq T_{s(z)}E$ enthalten ist.

Definition 3.3. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem Zusammenhang versehen sei. Unter der vertikalen Ableitung ∇ versteht man die Abbildung

$$\nabla : C^1(E) \longrightarrow C^0(E \otimes T^*X),\ s \longmapsto \nabla(s) = \pi_V \circ T(s).$$

Zu einem differenzierbaren Schnitt s in E (über X oder einer beliebigen offenen Teilmenge U) wird also die Abbildung

$$TX \xrightarrow{T(s)} TE \xrightarrow{\pi_V} V \cong p^*E \longrightarrow E$$

zugeordnet, wobei wir $\mathrm{Hom}(TX, E) \cong E \otimes T^*X$ auffassen.

Wenn zusätzlich ein Vektorfeld F auf X, also ein Schnitt $X \to TX$ im Tangentialbündel gegeben ist, so erhält man die Abbildung

$$\nabla_F : C^1(E) \longrightarrow C^0(E),\ s \longmapsto \nabla_F(s) = \nabla(s) \circ F,$$

die man die *vertikale Ableitung* in Richtung F nennt. Man beachte, dass dabei die Abhängigkeit vom Vektorfeld F nur punktweise ist, die Abhängigkeit von s aber infinitesimal ist, da die Tangentialabbildung $T(s)$ eingeht.

Definition 3.4. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem Zusammenhang versehen sei. Der Zusammenhang heißt *linear*, wenn die zugehörige vertikale Ableitung

$$\nabla : C^1(E) \longrightarrow C^0(E \otimes T^*X),\ s \longmapsto \nabla(s),$$

$\mathbb{K}$-linear ist (auf jeder offenen Menge).

Man beachte, dass dies nicht bedeutet, dass dieser Abbildung ein Bündelhomomorphismus zugrunde liegt bzw. ein $\mathcal{O}_X$-Modul-Homomorphismus vorliegt. Die Abbildung ist nicht mit der Multiplikation der Schitte mit Funktionen verträglich, sondern lediglich mit der Addition und Skalarmultiplikation mit Konstanten. Stattdessen gilt die folgende *Leibnizregel*.

Satz 3.5. *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem linearen Zusammenhang versehen sei. Dann erfüllt die zugehörige vertikale Ableitung*

$$\nabla : C^1(E) \longrightarrow C^0(E \otimes T^*X),\ s \longmapsto \nabla(s),$$

die Leibnizregel, d.h. für jeden differenzierbaren Schnitt s in E und jede differenzierbare Funktion f (die beide auf einer offenen Menge $U \subseteq X$ definiert sind) gilt

$$\nabla(fs) = s \otimes df + f\nabla(s).$$

Beweis. Beide Seiten sind lokal in X, wir können also annehmen, dass $E = X \times W$ ein triviales Bündel (mit einem $\mathbb{K}$-Vektorraum W) ist. Es seien $s_1, \ldots, s_r$ konstante Basisschnitte von E, d.h. s_i ist konstant gleich einem Vektor $w_i \in W$, und diese Vektoren bilden eine Basis von W. Wenn die Gleichheit für diese s_i (und beliebige f) gezeigt ist, so folgt sie allgemein.

Man kann jeden Schnitt s in E eindeutig als $s = \sum_{i=1}^r g_i s_i$ mit Koeffizientenfunktionen g_i schreiben. Damit gilt unter Verwendung der $\mathbb{K}$-Linearität der beiden Seiten und der Leibnizregel für die konstanten Schnitte die Beziehung

$$\begin{aligned}
\nabla(fs) &= \nabla(f\sum_{i=1}^r g_i s_i)\\
&= \nabla(\sum_{i=1}^r (fg_i)s_i)\\
&= \sum_{i=1}^r \nabla((fg_i)s_i)\\
&= \sum_{i=1}^r (s_i \otimes d(fg_i) + fg_i\nabla s_i)\\
&= \sum_{i=1}^r s_i \otimes (g_i df + f dg_i) + \sum_{i=1}^r fg_i \nabla s_i\\
&= \sum_{i=1}^r (g_i s_i \otimes df) + \sum_{i=1}^r (s_i \otimes f dg_i + fg_i\nabla s_i)\\
&= (\sum_{i=1}^r g_i s_i) \otimes df + f\sum_{i=1}^r (s_i \otimes dg_i + g_i\nabla s_i)\\
&= s \otimes df + f\sum_{i=1}^r \nabla(g_i s_i).
\end{aligned}$$

Sei also nun s ein Schnitt, der konstant gleich w ist. Sei $x \in X$. Wegen $\nabla(fs) = \nabla((f - f(x))s) + f(x)\nabla s$ können wir weiter annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Dann ist $(f\nabla s)(x) = 0$ und wir müssen nur noch den vorderen Summanden betrachten. Der Tangentialraum von $E = X \times W$ in $(x, 0)$ ist gleich $(T_x X \times 0) \oplus (0 \times W)$, und da der Nullschnitt horizontal ist, ist diese Zerlegung auch die Zerlegung in Horizontal- und Vertikalraum. Die vertikale Ableitung $\nabla(fs)$ im Punkt x ist die Gesamtabbildung

$$T_x X \xrightarrow{T(fs)} T_{(x,0)}(X \times W) \xrightarrow{\pi} W\,,$$

und da s konstant ist, ist dies gleich $s \otimes df$. $\square$

Man kann umgekehrt durch eine Ableitungsvorschrift, die die Leibnizregel erfüllt, einen linearen Zusammenhang angeben. Ein solcher Ableitungsformalismus und eine lineare Summenzerlegung des Tangentialbündels des Vektorbündels sind also im Wesentlichen äquivalente Konzepte.

Beispiel 3.6. Auf dem trivialen Bündel

$$p : X \times W = W_X \longrightarrow X$$

ergibt sich die kurze exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \to p^*(X \times W) = X \times W \times W &\to p^*T(X \times W) \\ &= TX \times W \times W \to p^*TX = TX \times W \to 0 \end{aligned}$$

von Vektorbündeln über $X \times W$ (aufgeschrieben sind die Totalräume). Die Produkte werden dabei über den Grundkörper genommen, wobei links die Identifizierung $(X \times W) \times_X (X \times W) = X \times W \times W$ und rechts die Identifizierung $TX \times_X (X \times W) = TX \times W$ vorgenommen wurde. Zu einem Punkt $(x, w) \in X \times W$ gehört die exakte Sequenz der Fasern, also $0 \to W \to T_xX \times W \to T_xX \to 0$. Die globale Sequenz spaltet (egal in welcher Kategorie). Die zur trivialen Spaltung gehörige vertikale Ableitung ist einfach die Standardableitung: einem Schnitt s in W, der bezüglich einer Basis durch die r Komponentenfunktionen $(f_1, \ldots, f_r)$ repräsentiert wird, wird die Ableitung

$$\nabla_{\mathrm{st}}(s) = (df_1, \ldots, df_r) \in C^0(W \otimes T^*X)$$

zugeordnet, also einfach das Tupel der einzelnen Differentiale zu den Komponentenfunktionen.

Es gibt aber auch andere Spaltungen der Sequenz und damit auch andere vertikale Ableitungen. Eine $r \times r$-Matrix M, deren Einträge 1-Differentialformen ω_{ij} sind, liefert die vertikale Ableitung

$$\nabla(f_1, \ldots, f_r) = (df_1 + \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes \omega_{1j}, \ldots, df_r + \sum_{j=1}^{r} f_j \otimes \omega_{rj}).$$

Zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ bezeichnen wir zu einem Vektorbündel E mit einem linearen Zusammenhang ∇ den Raum der horizontalen Schnitte mit $H(\nabla, U)$. Es ist also

$$H(\nabla, U) = \{s \in C^1(U, E) | \, \nabla(s) = 0\}.$$

Es handelt sich dabei um eine „sehr kleine“ Auswahl von Schnitten, wie das folgende Lemma zeigt und wie schon bei einem trivialen Vektorbündel (auch vom Rang 1) deutlich wird. Man spricht von lokal-konstanten Garben oder von lokalen Systemen.

Lemma 3.7. *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel vom Rang r auf X, das mit einem linearen Zusammenhang versehen sei. Dann ist für jede zusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ die Menge der horizontalen Schnitte $H(\nabla, U)$ ein $\mathbb{K}$-Untervektorraum von $C^1(U, E)$ der Dimension $\leq r$.*

Beweis. Es seien $s_1, \ldots, s_r$ linear unabhängige horizontale Schnitte auf U. Es sei s ein weiterer differenzierbarer horizontaler Schnitt. Man kann s eindeutig als $s = \sum_{i=1}^{r} g_i s_i$ mit Funktionen $g_i : U \to \mathbb{K}$ schreiben. Somit ist nach Satz 3.5

$$0 = \nabla s = \nabla(\sum_{i=1}^{r} g_i s_i) = \sum_{i=1}^{r} \nabla(g_i s_i) = \sum_{i=1}^{r} s_i \otimes dg_i.$$

Auf jeder kleineren offenen Menge, die zu $U' \subseteq \mathbb{K}^n$ diffeomorph ist, kann man dies unter Verwendung von Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ als $\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(s_i \otimes dx_j)$ schreiben. Die $s_i \otimes dx_j$ bilden (über dieser offenen Menge) eine Basis von $E|_{U'} \otimes TU'$ und daher muss $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$ sein. Also sind die g_i konstant (dies gilt wegen zusammenhängend auch auf U) und somit ist s eine $\mathbb{K}$-Linearkombination der s_i. $\square$

Wenn es global (also über X) r linear unabhängige horizontale Schnitte gibt, so ist das Vektorbündel trivial.

Liftungseigenschaften von Bündeln mit Zusammenhängen

Ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $p : E \to X$ erlaubt es unter Umständen, ähnlich wie bei Überlagerungen, zu einer gegebenen Abbildung

$$\psi : Z \longrightarrow X$$

in die Basismannigfaltigkeit X eine eindeutige horizontale Liftung

$$\tilde{\psi} : Z \longrightarrow E$$

anzugeben, sobald der Wert an einem einzigen Punkt vorgegeben ist. Dies gilt insbesondere für Intervalle $Z = I$ bzw. $Z = S^1$, also für geschlossene Wege.

Lemma 3.8. *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem Zusammenhang versehen sei. Es sei I ein Intervall,*

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

ein differenzierbarer Weg, $t \in I$ ein Punkt und $e \in E_{\gamma(t)}$ ein Punkt in der Faser über $\gamma(t)$. Dann gibt es ein offenes Teilintervall $J \subseteq I$, $t \in J$, und eine horizontale Liftung

$$\tilde{\gamma} : J \longrightarrow E$$

mit $\tilde{\gamma}(t) = e$.

Beweis. Dies beruht auf der Lösungstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen. $\square$

Diese Aussage ist in zweierlei Hinsicht unbefriedigend. Einerseits ist die Liftung nicht auf dem gesamten Intervall definiert, es liegt ein „Entweichungsphänomen" vor (der Zusammenhang muss nicht „vollständig" sein; die Entweichung hängt direkt mit dem entsprechenden Phänomen für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen zusammen).

Zweitens ist bei einem Weg - vorausgesetzt, die Liftung existiert auf dem ganzen Intervall - der Endpunkt der Liftung abhängig von dem Weg, nicht nur von seiner Homotopieklasse. Wenn man durch einen Zusammenhang auf einem Vektorbündel eine lineare Darstellung der Fundamentalgruppe der Basismannigfaltigkeit gewinnen möchte, so darf die Liftung aber nur von der Homotopieklasse abhängen. Dies erfordert, dass in einem infinitesimalen Sinn die Liftung eines „kleinen“ geschlossenen Weges zum Startpunkt zurückkehrt. Diese Eigenschaft wird durch den Begriff des lokal integrablen Zusammenhangs präzisiert. Man könnte auch von einer lokalen Trivialität des Zusammenhangs sprechen. Zwar ist jedes Vektorbündel lokal trivial, Entsprechendes muss aber nicht für einen Zusammenhang gelten (es handelt sich dabei um ein „Krümmungsphänomen“ des Zusammenhangs).

Definition 3.9. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem Zusammenhang versehen sei. Der Zusammenhang heißt *lokal integrabel*, wenn es zu jedem Punkt $e \in E$ einen auf einer offenen Umgebung $p(e) \in U \subseteq X$ definierten horizontalen Schnitt

$$s : U \longrightarrow E|_U$$

durch e gibt.

Dies bedeutet, dass zu jedem Punkt $x \in X$ und $e \in E_x$ lokal (in einer offenen Umgebung von x) die nach Fakt ***** maximal mögliche Anzahl (die durch den Rang des Bündels festgelegt ist) von linear unabhängigen horizontalen Schnitten angenommen wird. Die lokale Integrabilität ist bei einer eindimensionalen Basismannigfaltigkeit stets erfüllt.

Satz 3.10. *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem linearen Zusammenhang versehen sei. Es sei I ein Intervall,*

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

ein differenzierbarer Weg, $t \in I$ ein Punkt und $e \in E_{\gamma(t)}$ ein Punkt in der Faser über $\gamma(t)$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Es gibt eine horizontale Liftung*
$$\tilde{\gamma}_e = \tilde{\gamma} : I \longrightarrow E$$
mit $\tilde{\gamma}(t) = e$.
(2) *Für zwei Punkte $t_0, t_1 \in I$ ist die Abbildung*
$$E_{\gamma(t_0)} \longrightarrow E_{\gamma(t_1)},\ e \longmapsto \tilde{\gamma}_e(t_1),$$
linear.
(3) *Die in (2) angegebene Abbildung hängt nur von der Homotopieklasse von γ ab.*

Beweis. Siehe Storch/Wiebe, Band 4, 10.A und 10.B. □

Die Liftung eines Weges ist also stets auf dem ganzen Intervall definiert. Die in (2) angegebene Abbildung nennt man *Paralleltransport* oder *horizontaler Fasertransport*.

Satz 3.11. *Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und E ein differenzierbares Vektorbündel auf X, das mit einem linearen Zusammenhang versehen sei. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit der Faser $E_x \cong \mathbb{K}^r$. Dann definiert der horizontale Fasertransport einen natürlichen Anti-Gruppenhomomorphismus*

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{GL}\,(E_x) \cong \mathrm{GL}_r\,(\mathbb{K}),\ \gamma \longmapsto (e \mapsto \tilde{\gamma}_e(1)).$$

Diese Abbildung (bzw. die zugehörige Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser) heißt auch die *Monodromie*.

Satz 3.12. *Es sei X eine zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeit und $x \in X$ ein Punkt. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann entsprechen sich die (Isomorphieklassen von) (E, ∇), wobei E ein differenzierbares Vektorbündel vom Rang r über X und ∇ ein linearer lokal integrabler Zusammenhang auf E ist, und die (Isomorphieklassen von) Rechtsoperationen der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf $\mathbb{K}^r$.*

Auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit gibt es nur auf dem trivialen Vektorbündel einen (bis auf Isomorphie eindeutigen) linearen lokal integrablen Zusammenhang. Es gibt aber im Allgemeinen auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit auch nichttriviale Vektorbündel (man denke an den projektiven Raum). Umgekehrt kann es auf einem trivialen Vektorbündel über einem nicht einfach zusammenhängenden Grundraum nicht isomorphe lokal integrable Zusammenhänge geben.