Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' : M \to M$ an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 3.2. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} :\ x \geq n\}$$

ebenfalls die Peanoaxiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgeabbildung?) erfüllt.

Die folgende Aufgabe sollte man nicht bearbeiten, sondern zum Anlass nehmen, sich über unser Ziffernsystem zu freuen.

Aufgabe 3.3. Man definiere, welche endlichen Zeichenketten aus I, V, X, L, C, D, M im römischen Zahlsystem (mit oder ohne Subtraktionsregel) erlaubt sind und welche nicht. Man erstelle einen Algorithmus, der zu jeder erlaubten römischen Zahl den Nachfolger berechnet.

Aufgabe 3.4. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch die Gleichmächtigkeit von Mengen eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird.

Aufgabe 3.5. Es seien L und M zwei Mengen und

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq L$ eine Bijektion

$$S \longrightarrow \varphi(S)$$

vorliegt, und dass ebenso für jede Teilmenge $T \subseteq M$ eine Bijektion

$$\varphi^{-1}(T) \longrightarrow T$$

vorliegt.

Aufgabe 3.6. Skizziere ein Inklusionsdiagramm für sämtliche Teilmengen einer dreielementigen Menge.

Aufgabe 3.7. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 3.8. Es sei M eine Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge davon. Zeige, dass durch

$$S \preccurlyeq T, \text{wenn es eine injektive Abbildung } S \to T \text{ gibt}\,,$$

eine reflexive und transitive Relation auf $\mathfrak{P}(M)$ definiert wird, die in aller Regel weder symmetrisch noch antisymmetrisch ist.

Die folgenden Aufgaben über endliche Mengen sind intuitiv zumeist klar. Es geht aber darum, sie unter Bezug auf die Definitionen mit Hilfe von bijektiven Abbildungen zu beweisen.

Aufgabe 3.9. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $x \in \{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass die Menge

$$\{1, \ldots, n\} \setminus \{x\}$$

die Anzahl $n - 1$ besitzt.

Aufgabe 3.10. Es seien m und n natürliche Zahlen. Zeige durch Induktion über m, dass aus einer Bijektion

$$\varphi : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

folgt, dass $m = n$ ist.

Aufgabe 3.11. Es sei M eine endliche Menge. Zeige, dass die Anzahl von M wohldefiniert ist.

Aufgabe 3.12. Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T ebenfalls eine endliche Menge ist, und dass für ihre Anzahl k die Abschätzung

$$k \leq m$$

gilt. Zeige ferner, dass T genau dann eine echte Teilmenge ist, wenn

$$k < m$$

ist.

Aufgabe 3.13. Es seien S und T endliche Teilmengen einer Menge M. Zeige, dass dann auch die Vereinigung $S \cup T$ endlich ist.

Die beiden folgenden Aufgaben verwenden das *Maximum* einer geordneten Menge. Sei $(I, \leq)$ eine geordnete Menge. Ein Element $x \in I$ heißt *maximal* (in I) oder ein *maximales Element* (von I), wenn es kein Element $y \in I$ gibt mit $x < y$.

Aufgabe 3.14. Es sei $(I, \leq)$ eine total geordnete Menge. Zeige durch Induktion, dass jede nichtleere endliche Teilmenge $T \subseteq I$ ein eindeutiges Maximum besitzt.

Aufgabe 3.15. Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass T genau dann endlich ist, wenn T ein Maximum besitzt.

Es seien $(M_1, \leq_1)$ und $(M_2, \leq_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Ordnung definiert ist. Eine Abbildung

$$F : M_1 \longrightarrow M_2,\ x \longmapsto F(x),$$

heißt *ordnungstreu* (oder *monoton*), wenn für alle $x, x' \in M_1$ mit $x \leq_1 x'$ stets auch $F(x) \leq_2 F(x')$ gilt.

Aufgabe 3.16. Es sei $(M, \leq)$ eine endliche total geordnete Menge. Definiere für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ eine ordnungstreue bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow M,$$

wobei $\{1, \ldots, n\}$ mit der natürlichen Ordnung versehen sei.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.17. (4 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Beschreibe die möglichen Zustände (also die möglichen Zeitangaben) mit Hilfe einer geeigneten Produktmenge. Definiere (mit Hilfe von geeigneten Hilfsabbildungen) die Nachfolgerabbildung, die zu jeder Zeitangabe die Zeitangabe der nächsten Sekunde berechnet.

Aufgabe 3.18. (4 Punkte)

Es sei $(M, \leq)$ eine geordnete Menge und $\mathfrak{P}(M)$ die Potenzmenge von M. Zeige, dass die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ x \longmapsto \{y \in M : x \leq y\},$$

ordnungstreu und injektiv ist, wobei die Potenzmenge mit der Inklusion versehen ist.

Die folgende Aussage verwendet, dass sich jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eindeutig als Produkt $n = 2^k u$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbb{N}$ ungerade schreiben lässt.

Aufgabe 3.19. (4 Punkte)

Wir definieren auf $\mathbb{N}_+$ eine neue Relation R durch folgende Vorschrift: Für zwei Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n = 2^k t$ und $m = 2^\ell u$ mit t, u ungerade sei

$$xRy \text{ falls } t < u \text{ gilt oder falls zugleich } t = u \text{ und } k \leq \ell \text{ gilt}$$

(rechts wird auf die natürliche Ordnung in $\mathbb{N}$ Bezug genommen). Zeige, dass R eine totale Ordnung auf $\mathbb{N}$ ergibt und skizziere exemplarisch diese Ordnung.

Zeige ferner, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein wohldefiniertes Element $n^\star \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $nRn^\star$ gilt und dass es zwischen n und $n^\star$ keine weiteren Elemente gibt (diese Formulierung ist zu präzisieren). Erfüllt die Menge $(\mathbb{N}_+, 1, \star)$ die Peano-Axiome?

Aufgabe 3.20. (3 Punkte)

Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei

$$M \longrightarrow N$$

eine surjektive Abbildung in eine weitere Menge N. Zeige, dass dann auch N endlich ist, und dass für ihre Anzahl n die Abschätzung

$$n \leq m$$

gilt.

Die folgende Aufgabe ist zum jetzigen Zeitpunkt vermutlich schwierig.

Aufgabe 3.21. (5 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?