

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 24.1. Beschreibe ein Beispiel einer glatten Kurve $C \subset \mathbb{A}_K^2$ mit einer Parametrisierung, deren Differential an mindestens einem Punkt verschwindet.

AUFGABE 24.2. Betrachte das Achsenkreuz $V(xy) \subset \mathbb{A}_K^2$ und den zum Nullpunkt gehörigen lokalen Ring R mit maximalem Ideal \mathfrak{m} . Beschreibe explizit eine K -Basis für die Restklassenringe R/\mathfrak{m}^n und bestimme die Dimensionen davon.

AUFGABE 24.3. Sei K ein Körper und $K[[T]]$ der Potenzreihenring. Gebe die inverse Potenzreihe zu $1 - T$ an.

AUFGABE 24.4. Sei K ein Körper, $\mathfrak{m} = (T) \subset K[T]$ das zum Nullpunkt gehörige maximale Ideal mit der Lokalisierung $R = K[T]_{\mathfrak{m}}$. Definiere einen K -Algebra-Homomorphismus

$$\varphi: R \longrightarrow K[[T]]$$

mit $\varphi(T) = T$, wobei $K[[T]]$ den Ring der formalen Potenzreihen bezeichnet.

AUFGABE 24.5. Berechne die ersten fünf Glieder (bis einschließlich c_4) der eingesetzten Potenzreihe $F(G)$ im Sinne von Definition.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 24.6. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein irreduzibles reelles Polynom $F \in \mathbb{R}[X, Y]$ derart, dass beide partiellen Ableitungen übereinstimmen und nicht konstant sind. Zeige, dass dies über \mathbb{C} nicht möglich ist.

AUFGABE 24.7. (3 Punkte)

Betrachte die Kurve $C = V(X^2 - Y^2 - Y^3)$ mit der in Beispiel 24.3 besprochenen Parametrisierung. Bestimme die singulären Punkte der Kurve zusammen mit den Multiplizitäten und Tangenten. Berechne ebenfalls die Bildpunkte und die Tangenten für die Parameterwerte $t = -1, 0, 1$.

AUFGABE 24.8. (3 Punkte)

Beschreibe eine formale Potenzreihe über \mathbb{C} , die in keiner Umgebung des Nullpunktes konvergiert.

AUFGABE 24.9. (3 Punkte)

Sei K ein Körper. Vergleiche die beiden Ringe

$$(K[X])[Y] \text{ und } (K[[Y]])[X].$$

AUFGABE 24.10. (6 Punkte)

Sei R ein noetherscher kommutativer Ring. Man zeige, dass $R[[T_1, \dots, T_n]]$ noethersch ist.

Hinweis: Lassen Sie sich vom Beweis des Hilbertschen Basissatzes inspirieren!