**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Mathematik I

## Vorlesung 14

### Rang von Matrizen

Definition 14.1. Es sei $K$ ein Körper und sei $M$ eine $m \times n$-Matrix über $K$. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von $K^m$ den (Spalten-) *rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M .$$

Korollar 14.2. *Es sei $K$ ein Körper und es seien $V$ und $W$ $K$-Vektorräume der Dimension $n$ bzw. $m$. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

*eine lineare Abbildung, die bzgl. gewisser Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt*

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M .$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.2. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer Matrix ein, dass ist die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes.

Lemma 14.3. *Es sei $K$ ein Körper und sei $M$ eine $m \times n$-Matrix über $K$. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 13.13 verwendeten Zahl $r$.*

*Beweis.* Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 13.13 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang $r$, da die ersten $r$ Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang $r$, da wiederum die ersten $r$ Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser $r$ Spalten sind. Die Aufgabe 14.1 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom Rang einer Matrix sprechen werden.

Korollar 14.4. *Es sei $K$ ein Körper und sei $M$ eine $n \times n$-Matrix über $K$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$M$ ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von $M$ ist $n$.*
(3) *Die Zeilen von $M$ sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von $M$ sind linear unabhängig.*

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 13.8 und aus Lemma 14.3. □

## Determinanten

Definition 14.5. Es sei $K$ ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über $K$. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $M_i$ diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in $M$ die erste Spalte und die $i$-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine $n$ kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 14.6. Für eine $2 \times 2$-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

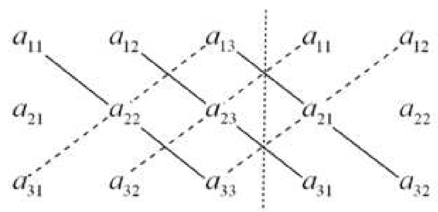
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$

Beispiel 14.7. Für eine $3 \times 3$-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.$$



Als Merkregel für eine $3 \times 3$-Matrix verwendet man die Regel von Sarrus. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Lemma 14.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

*ist*

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \, .$$

*Insbesondere ist für die Einheitsmatrix*

$$\det E_n = 1 \, .$$

*Beweis.* Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

## Determinantenfunktionen

Zur systematischen Behandlung von Determinanten braucht man einige neue Begriffe.

Definition 14.9. Es sei $K$ ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und $W$ $K$-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\triangle : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt *multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ mit $v_j \in V_j$ die induzierte Abbildung

$$V_i \longrightarrow W, \, v_i \longmapsto \triangle(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

linear ist.

Definition 14.10. Es sei $K$ ein Körper und $V$ ein $K$-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\triangle : V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow K$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist $\triangle(v) = 0$.

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine multilineare alternierende Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das $n$-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix auf als einen Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei die einzelnen Einträge $v_i$ Zeilenvektoren der Länge $n$ sind.[1]

Satz 14.11. *Es sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

*multilinear. D.h., dass für beliebiges $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und $u, w \in K^n$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

*und für $\lambda \in K$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ \lambda u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

[1] Die alterniernende Multilinearität gilt auch, wenn man eine Matrix als ein $n$-Tupel aus Spalten auffasst, was wir später zeigen werden. Aufgrund der rekursiven Definition mit Hilfe der ersten Spalte sind diese Eigenschaften einfacher für die Zeilen zu zeigen.

*Beweis.* Sei

$$M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{M} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge analog bezeichnen. Insbesondere ist also $u = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ und $w = (a'_{k1}, \ldots, a'_{kn})$. Zu jedem Vektor $v$ sei $v^*$ der Vektor, der entsteht, wenn man den ersten Eintrag weglässt. Zu $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ ist also $v_i^* = (a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Mit dieser Notation ist

$$M_k = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{k-1}^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach $n$, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Für $i \neq k$ ist $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} = a'_{i1}$ und

$$\det \tilde{M}_i = \det M_i + \det M'_i$$

nach Induktionsvoraussetzung. Für $i = k$ ist $M_k = M'_k = \tilde{M}_k$ und es ist $\tilde{a}_{k1} = a_{k1} + a'_{k1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det \tilde{M} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{i1} \det \tilde{M}_i \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (\det M_i + \det M'_i) + (-1)^{k+1} (a_{k1} + a'_{k1})(\det \tilde{M}_k) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a_{k1} \det M_k + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i\neq k i=1,}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M'_i \\
&\quad + (-1)^{k+1} a'_{k1} \det M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a'_{i1} \det M'_i \\
&= \det M + \det M'.
\end{aligned}$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation beweist man ähnlich, siehe Aufgabe 14.11. □

Satz 14.12. *Es sei $K$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

*folgende Eigenschaften.*

(1) *Wenn in $M$ zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det M = 0$. *D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in $M$ zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor $-1$.*

*Beweis.* (1) und (2) werden parallel durch Induktion über $n$ bewiesen, wobei es für $n = 1$ nichts zu zeigen gibt. Sei also $n \geq 2$ und $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{ij}$. Die relevanten Zeilen seien $v_r$ und $v_s$ mit $r < s$. Nach Definition ist $\det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i$. Nach Induktionsvoraussetzung für (1) sind dabei $\det M_i = 0$ für $i \neq r, s$, da ja dann zwei Zeilen übereinstimmen. Damit ist

$$\det M = (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s\,,$$

wobei $a_{r1} = a_{s1}$ ist. Die beiden Matrizen $M_r$ und $M_s$ haben die gleichen Zeilen, allerdings tritt die Zeile $z = v_r = v_s$ in $M_r$ als die $(s-1)$-te Zeile und in $M_s$ als die $r$-te Zeile auf. Alle anderen Zeilen kommen in beiden Matrizen in der gleichen Reihenfolge vor. Durch insgesamt $s - r - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen kann man $M_r$ in $M_s$ überführen. Nach der Induktionsvoraussetzung für (2) unterscheiden sich daher die Determinanten um den Faktor $(-1)^{s-r-1}$, also ist $\det M_s = (-1)^{s-r-1} \det M_r$. Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\det M &= (-1)^{r+1} a_{r1} \det M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det M_s \\
&= a_{r1}((-1)^{r+1} \det M_r + (-1)^{s+1}(-1)^{s-r-1} \det M_r) \\
&= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^{2s-r}) \det M_r) \\
&= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^{r}) \det M_r) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir (2). Nach Teil (1) (für $n$) und aufgrund der Multilinearität ist

$$0 = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

□

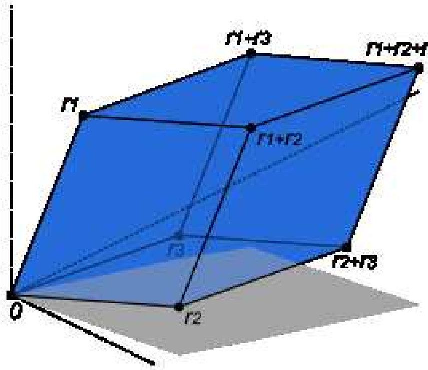
SATZ 14.13. *Es sei $K$ ein Körper und sei $M$ eine $n \times n$-Matrix über $K$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von $M$ sind linear unabhängig.*
(3) *$M$ ist invertierbar.*
(4) $\operatorname{rang} M = n$.

*Beweis.* Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 14.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 14.12

$$
\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.
$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Zeilenaddition die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von null verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinate der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □




Bemerkung 14.14. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ $n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n | \, a_i \in [0,1]\} .$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen" Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\text{vol } P = | \det (v_1, \ldots, v_n) | ,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

# Abbildungsverzeichnis

Quelle = Sarrus rule.png, Autor = Benutzer Kmhkmh auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 3
Quelle = Determinant parallelepiped.svg , Autor = Claudio Rocchini, Lizenz = CC-by-sa 3.0 8