Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 50

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 50.1. Bestimme für die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 50.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 50.3. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 50.4. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^2 y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 50.5. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 50.6. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar? Wieviele Urbilder besitzt ein Punkt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.7. (4 Punkte)

Man konstruiere ein Beispiel, das zeigt, dass Lemma 49.3 ohne die Voraussetzung, dass mit je zwei Punkten auch die Verbindungsgerade zur Definitionsmenge gehört, nicht gilt.

(Tipp: Man denke daran, wie man flach auf einen steilen Berg kommt.)

Aufgabe 50.8. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

ist für alle $P \in V$.

Aufgabe 50.9. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 50.10. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

(1) Bestimme die regulären Punkte von φ.
(2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung φ nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von φ in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
(3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar (s, p) schreiben als $(s, p) = (x + y, xy)$?
(4) Ist ein reelles Zahlenpaar (x, y) bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe $x+y$ und das Produkt xy festgelegt?

Aufgabe 50.11. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x,y,z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x,y,z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 50.12. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x,y,z) \longmapsto (x^2 - y^2 z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.