Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 43

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 43.1. Sei M eine quadratische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Es sei φ_1 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und φ_2 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t)\,.$$

Zeige, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

Aufgabe 43.2. Sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei L der Lösungsraum dieses Systems und sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 43.3. Wie transformieren sich in Lemma 43.5 die Anfangsbedingungen?

Aufgabe 43.4. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.5. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 43.6.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 43.7.*

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 43.8.*

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 43.9. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ für alle $t \in I$. Zeige, dass $e^{\lambda t} \cdot u$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ ist.

Aufgabe 43.10. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein (konstanter) Eigenvektor von $M(t)$ zum (variablen, von t differenzierbar abhängigen) Eigenwert $\lambda(t)$. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda(t)t} \cdot u$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgabe 43.11. Es sei $M(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine (variable) $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetige Funktionen

$$a_{ij} \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien. Es sei $u(t) \in \mathbb{R}^n$ ein (variabler, von t differenzierbar abhängiger) Eigenvektor von $M(t)$ zum konstanten Eigenwert λ. Zeige durch ein Beispiel, dass $e^{\lambda t} \cdot u(t)$ keine Lösung der linearen Differentialgleichung $v' = Mv$ sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.12. (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.13. (4 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.14. (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 43.15. (6 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 43.16. (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix} .$$