Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 25

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[i]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2. Es sei $K \subset K' \, (\subseteq \mathbb{R})$ eine reell-quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch $K[i] \subset K'[i]$ eine quadratische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 3. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt“ beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 4. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Sei $Z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl und r eine konstruierbare positive reelle Zahl. Dann ist auch der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius r konstruierbar.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Es seien P, Q_1, Q_2 drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände $d(P, Q_1)$ und $d(P, Q_2)$ gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi : E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf P, 1 auf Q_1 und i auf Q_2 schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegendenTasten (bei „gleichstufiger Stimmung“) eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl $re^{i\varphi}$ genau dann konstruierbar ist, wenn r und $e^{i\varphi}$ konstruierbar sind.

Aufgabe 10. (4 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}, \sqrt{7}] = L\,.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, eine $\mathbb{Q}$-Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.