Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 49

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 49.1. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi\colon L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) = Q$$

und es sei

$$f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 49.2. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 49.3. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz}$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 49.4. Es sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

AUFGABE 49.5. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\operatorname{grad} f(P)$ ist.

AUFGABE 49.6. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

AUFGABE 49.7. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^2 - x.$$

AUFGABE 49.8. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x.$$

AUFGABE 49.9. Betrachte die Linearform

$$L \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) |\, 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

AUFGABE 49.10. Es sei

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq V$ eine offene Menge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung

$$\sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \ = \ \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P f(v, v)$$

gilt.

Aufgabe 49.11. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 49.12. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$f, g \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.13. (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq || v || \cdot || w ||$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe 49.14. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y \, .$$

Aufgabe 49.15. (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gegebene abgeschlossene (volle) Dreieck ist.

Aufgabe 49.16. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1,1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 49.17. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x + \sin y - xz.$$

a) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.

b) Es sei

$$E = \{(x,y,z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten $\tilde{G}$ von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.

c) Zeige, dass $\tilde{G}$ die orthogonale Projektion von G auf E ist.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 49.18. (bis 10 Punkte)

Erstelle eine Graphik, die Beispiel 49.5 illustriert (es sollten der Graph der Funktion, geeignete Längsschnitte und die Nullstellenmenge wiedergegeben werden).