

**Mathematik III****Arbeitsblatt 87****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 87.1. Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = (x^2 - y^3)dx + x^3y^2dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$ .

AUFGABE 87.2. Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2dx + yzdy + x^3dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 87.3. Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xdx \wedge dy + xy^2zdy \wedge dz + xe^ydx \wedge dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 87.4. Es seien  $W \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei  $\psi^*$  das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

AUFGABE 87.5. Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2x - \sin y)dx - x \cos y dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$  geschlossen und auch exakt ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 87.6. (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 1-Differentialform

$$\omega = xy^2z^3dx + xyzdy + x^3yz^4dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 87.7. (3 Punkte)

Bestimme die äußere Ableitung der 2-Differentialform

$$\omega = xy^2dx \wedge dy + (x^3 - y^2z^4)dy \wedge dz + \sin(xy) dx \wedge dz$$

auf dem  $\mathbb{R}^3$ .

AUFGABE 87.8. (5 Punkte)

Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und es seien  $\omega_1, \dots, \omega_r$  Differentialformen auf  $U$ , wobei  $\omega_i$  eine  $k_i$ -Differentialform sei. Finde und beweise eine Formel für

$$d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r).$$

AUFGABE 87.9. (5 Punkte)

Zeige, dass die Differentialform

$$\omega = (2xy + 3x^2 - ye^{xy})dx + (x^2 - xe^{xy} + 8y)dy$$

auf dem  $\mathbb{R}^2$  geschlossen und auch exakt ist.

AUFGABE 87.10. (4 Punkte)

Begründe die einzelnen Gleichungen in der ersten Gleichungskette im Beweis zu Lemma 87.2.

Gehe dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, indem Sie dort die Zeile  
[[/Differentialform/Äußere Ableitung/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort  
{{:Differentialform/Äußere Ableitung/Vergleichskette/Begründungsfenster}}  
ein.

- (3) Es erscheint die Gleichungskette. Wenn Sie auf eines der Gleichzeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für diese Abschätzung ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort  
[[Ihr Benutzername/Differentialform/Äußere Ableitung/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]  
hinschreiben.