Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 19

Aufgabe 1. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f \in R$. Zeige, dass $N(f) \in (f)$ ist, dass also die Norm zum von f erzeugten Hauptideal gehört. Zeige durch ein Beispiel, dass dies für die Spur nicht gelten muss.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f_1, \ldots, f_n \in R$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von R. Zeige, dass dann der Betrag der Diskriminante

$$|\triangle(f_1, \ldots, f_n)|$$

minimal ist unter allen Diskriminanten von linear unabhängigen n-Tupeln aus R.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei R ein Zahlbereich und sei $f_1, \ldots, f_n \in R$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von R mit Diskriminante

$$\triangle(f_1, \ldots, f_n) \, .$$

Es sei $h \in R$. Zeige, dass $hf_1, \ldots, hf_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis des Hauptideals (h) bildet und dass gilt:

$$\min\{|\triangle(b_1, \ldots, b_n)| : \, (b_1, \ldots, b_n) \, \mathbb{Z}\text{-Basis von } (h)\} = N(h)^2 |\triangle(f_1, \ldots, f_n)|$$

.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Berechne die Diskriminante der Gaußschen Zahlen. Gebe zwei wesentlich verschiedene $\mathbb{Z}$-Basen von $\mathbb{Z}[i]$ an und überprüfe, dass die Diskriminanten übereinstimmen.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Finde möglichst viele (nicht isomorphe) kommutative Ringe mit vier Elementen. Beweise, dass die Liste vollständig ist.

Aufgabe 6. (max 4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 49, 64, 81, 121, 125$ und 132 Elementen.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Gehe zur Seite

Endliche Körper/Nicht Primkörper/Einige Operationstafeln

und erstelle für einen (!) der dort angegebenen Körper Additions- und Multiplikationstafeln.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{F}_9$ für jedes Element die multiplikative Ordnung. Gib insbesondere die primitiven Elemente an.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $e, d \in \mathbb{N}_+$. Zeige: $\mathbb{F}_{p^d}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{F}_{p^e}$ genau dann, wenn e ein Vielfaches von d ist.

Aufgabe 10. (7 Punkte)

Sei K ein Körper und $K \subset L$ eine Ringerweiterung vom Grad drei. Klassifiziere die möglichen Typen von L, ähnlich wie in Lemma 19.9.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Bestimme im Polynomring $F_2\ [X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad $2, 3, 4$.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Bestimme im Polynomring $F_3\ [X]$ alle normierten irreduziblen Polynome vom Grad 3.

Aufgabe 13. (1 Punkt)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass die irreduziblen Polynome genau die irreduziblen Elemente in $K[X]$ sind.

Aufgabe 14. (1 Punkt)

Sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Sei $F : K \to K$ der Frobenius-Homomorphismus. Zeige, dass genau die Elemente aus $\mathbb{Z}/(p)$ invariant unter F sind.