Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 23

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine n-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass die zyklische Gruppe

$$Z_n = \left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{-j} \end{pmatrix} \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

auf der Punktmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

treu operiert, dass sie bei n ungerade auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\}$$

ebenfalls treu operiert und dass sie bei n gerade auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle \mid j = 0, \ldots, \frac{n}{2} - 1 \right\}$$

operiert, aber nicht treu. Was ist in diesem Fall der Kern der Operation?

Aufgabe 23.2. Wir betrachten die binäre Diedergruppe BD_n. Zeige, dass bei $n \geq 3$ die von

$$B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe kein Normalteiler ist.

Aufgabe 23.3. Es sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine $2n$-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass die binäre Diedergruppe BD_n auf der Geradenmenge

$$\left\{ \langle \begin{pmatrix} \zeta^j \\ \zeta^{-j} \end{pmatrix} \rangle \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\} \cup \left\{ \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \right\}$$

operiert.

Aufgabe 23.4. Zeige, dass die in Beispiel 23.1, Beispiel 23.2, Beispiel 23.3 und Beispiel 23.4 beschriebenen Gruppen bereits Untergruppen der $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ sind.

Aufgabe 23.5. Zeige, dass die Matrix

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix}$$

zu $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ gehört.

Aufgabe 23.6. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine endliche Untergruppe und es sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$. Zeige, dass durch

$$\Phi(w, z) \, := \, \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma w, \sigma z \rangle$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ definiert wird.

Aufgabe 23.7. Es sei $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ eine Matrix und

$$\varphi \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann unitär ist, wenn ${}^tM \cdot \overline{M}$ die Einheitsmatrix ist.

In den folgenden Aufgaben rekapitulieren wir einige Eigenschaften der Einheitswurzeln und der Kreisteilungspolynome.

Aufgabe 23.8. Bestimme die Koordinaten der fünften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 23.9. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die n Vektoren (im $\mathbb{C}^n$)

$$(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}), \zeta \in \mu_n(\mathbb{C}),$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 23.10. Es sei $\zeta \in K$ eine n-te primitive Einheitswurzel in einem Körper K. Zeige die „Schwerpunktformel“

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1} \, = \, 0.$$

Aufgabe 23.11. Bestimme die Kreisteilungspolynome Φ_n für $n \leq 15$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.12. (2 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta 7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}$$

mit $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 23.13. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ \zeta & -i \end{pmatrix}$$

zur binären Oktaedergruppe gehört (dabei ist ζ eine primitive achte Einheitswurzel). Gehört sie auch zur binären Tetraedergruppe?

Aufgabe 23.14. (6 Punkte)

Zeige, dass die binäre Ikosaedergruppe 120 Elemente besitzt.