

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 2

Körper

Wir werden nun die Eigenschaften der reellen Zahlen besprechen. Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukturen werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei Elementen der gegebenen Menge M , also beispielsweise zwei reellen Zahlen, ein weiteres Element der Menge zu, es handelt sich also um Verknüpfungen.

DEFINITION 2.1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) Axiome der Addition
 - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
 - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
 - (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
 - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.
- (2) Axiome der Multiplikation
 - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
 - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
 - (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
 - (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.
- (3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir in der nächsten Vorlesung kennenlernen werden.

LEMMA 2.2. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei x vorgegeben und seien y und y' Elemente mit $x + y = 0 = x + y'$. Dann gilt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'.$$

Insgesamt ist also $y = y'$. Für den zweiten Teil sei x vorgegeben mit $x \neq 0$. Es seien z und z' Elemente mit $xz = 1 = xz'$. Dann ist

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z'.$$

Also ist $z = z'$. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1} .

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n -fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser“ Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

BEISPIEL 2.3. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bzgl. der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstabellen sehen also wie folgt aus.

| | | |
|---|---|---|
| + | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

und

| | | |
|---|---|---|
| · | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Körper der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Körpers. Sie gelten daher für einen jeden Körper.

LEMMA 2.4. *Es sei K ein Körper und seien $a, b, c, a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ Elemente aus K . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) $a0 = 0$ (Annullationsregel).
- (2) $(-a)b = -ab = a(-b)$.
- (3) $(-a)(-b) = ab$ (Vorzeichenregel).
- (4) $a(b - c) = ab - ac$.
- (5) $(\sum_{i=1}^r a_i)(\sum_{k=1}^s b_k) = \sum_{1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ (allgemeines Distributivgesetz).
- (6) Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0+0) = a0+a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)

$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$

nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab . Die zweite Gleichheit folgt analog.

(3) Nach (2) ist $(-(-a))b = (-a)(-b)$ und wegen $-(-a) = a$ folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 2.10.

(6) Nehmen wir an, dass a und b beide von null verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)(b^{-1}a^{-1}) =$

1. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Annullationsregel

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 0(b^{-1}a^{-1}) = 0,$$

so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.

□

Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf dem Zahlenstrahl liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

AXIOM 2.5. Die reellen Zahlen \mathbb{R} erfüllen die folgenden *Anordnungsaxiome*.

- (1) Für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
- (2) Aus $a \geq b$ und $b \geq c$ folgt $a \geq c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
- (3) Aus $a \geq b$ folgt $a + c \geq b + c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
- (4) Aus $a \geq 0$ und $b \geq 0$ folgt $ab \geq 0$ (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$).
- (5) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \geq a$.



Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf \mathbb{R} eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität. Die fünfte Eigenschaft heißt *Archimedes-Axiom*.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in \mathbb{R} ist, dass $a \geq b$ äquivalent¹ zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von

¹Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

$-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Teilmengen der reellen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+^0, \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches.

LEMMA 2.6. *Für reelle Zahlen gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1) $1 > 0$.
- (2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
- (3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
- (4) Es ist $a^2 \geq 0$.
- (5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.
- (7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
- (8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 2.4. □

Das folgende Lemma fasst Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom zusammen.

- LEMMA 2.7. (1) Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.
 (2) Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.
 (3) Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit

$$x < \frac{n}{k} < y.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x . Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n > y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 2.6 auch $nx > y$. (2). Es ist x^{-1} eine wohldefinierte, nach Lemma 2.6 positive reelle Zahl. Aufgrund des Archimedes-Axioms und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x^{-1}$. Dies ist nach Lemma 2.6 äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} < (x^{-1})^{-1} = x.$$

(3). Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach (2) ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen (1) gibt es auch ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $n' \frac{1}{k} > x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{n} \geq -xk$. Nach Lemma 2.6 gilt daher $(-\tilde{n}) \frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n \frac{1}{k} > x \text{ und } (n - 1) \frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

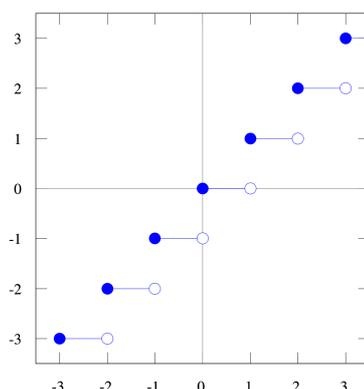
wie gewünscht. □

DEFINITION 2.8. Für reelle Zahlen a, b , $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze*. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in \mathbb{R} ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$.

Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n + 1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



DEFINITION 2.9. Die *Gaußklammer* ist die Funktion

$$[] : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto [x],$$

die durch

$$[x] = n, \text{ falls } x \in [n, n + 1[\text{ und } n \in \mathbb{Z},$$

definiert wird.

Die Anordnungseigenschaften erlauben es auch, von wachsenden und fallenden Funktionen zu sprechen.

DEFINITION 2.10. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *wachsend*, wenn

$$f(x') \geq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt,}$$

streng wachsend, wenn

$$f(x') > f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt,}$$

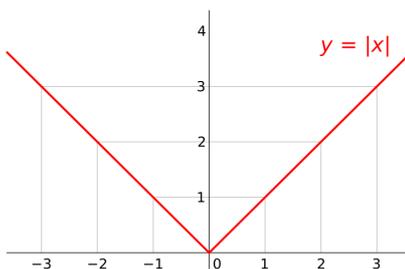
fallend, wenn

$$f(x') \leq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt,}$$

streng fallend, wenn

$$f(x') < f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt.}$$

Der Betrag



DEFINITION 2.11. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

LEMMA 2.12. *Die reelle Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

- (1) $|x| \geq 0$.
- (2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
- (3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
- (4) $|y - x| = |x - y|$.
- (5) $|xy| = |x||y|$.
- (6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
- (7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung für den Betrag).

Beweis. Siehe Aufgabe 2.7.

□

Abbildungsverzeichnis

| | |
|---|---|
| Quelle = Archimedes (Idealportrait).jpg , Autor = Benutzer Ixitixel auf Commons, Lizenz = PD | 4 |
| Quelle = Floor function.svg , Autor = Benutzer Omegatron auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 6 |
| Quelle = Absolute value.svg , Autor = Benutzer Ævar Arnfjörð Bjarmason auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 7 |