Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 25

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass G genau dann kommutativ ist, wenn alle Konjugationsklassen einelementig sind.

Aufgabe 25.2. Sei G eine endliche Gruppe und seien $x, y \in G$ konjugierte Elemente. Zeige, dass x und y die gleiche Ordnung besitzen.

Aufgabe 25.3. Sei G eine Gruppe und sei $H \subseteq Z$ eine Untergruppe des Zentrums von G. Zeige, dass H ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 25.4. Zeige, dass zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ genau dann konjugiert sind, wenn ihre Zykeldarstellung den gleichen Typ haben, d.h. wenn die Anzahl der Zykel und deren Längen übereinstimmen.

Aufgabe 25.5. Man gebe ein Beispiel für eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$, $K \subseteq \mathbb{C}$, das zeigt, dass zu einem Element $z = a + bi \in K$ die reellen Koordinaten a und b nicht zu K gehören müssen.

Aufgabe 25.6. Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 25.7. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl. Zeige, dass der erzeugte Unterkörper $\mathbb{Q}(z)$ eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 25.8. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl mit dem Minimalpolynom $F \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass jede komplexe Nullstelle von F ebenfalls konstruierbar ist.

Aufgabe 25.9. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl mit dem Minimalpolynom $F \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass der Zerfällungskörper von F eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.10. (4 Punkte)

Es seien $K \subseteq L \subseteq M$ endliche Körpererweiterungen. Es sei $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, dass über M in Linearfaktoren zerfalle. Der Zwischenkörper L enthalte keine Nullstelle von F. Folgt daraus, dass F irreduzibel über L ist?

Aufgabe 25.11. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$, $K \subseteq \mathbb{C}$, derart, dass die komplexe Konjugation sich nicht auf K einschränken lässt.

Aufgabe 25.12. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine Körpererweiterung in $\mathbb{C}$ und es sei $K \subseteq L$ der Unterkörper, der aus allen konstruierbaren Zahlen in L besteht. Zeige, dass für jeden Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|\mathbb{Q})$ die Beziehung $\varphi(K) \subseteq K$ gilt.

Aufgabe 25.13. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $v_1, \ldots, v_n \in L$ Elemente, die eine K-Basis von L bilden. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Zeige, dass auch $xv_1, \ldots, xv_n \in L$ eine K-Basis von L bilden.

Aufgabe 25.14. (4 Punkte)

Zeige, dass für $n \geq 2$ der konstante Koeffizient der Kreisteilungspolynome Φ_n immer 1 ist.

Aufgabe 25.15. (3 Punkte)

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraische Zahlen.

a) Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ gibt derart, dass man alle α_i als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von Potenzen der Nullstellen von F schreiben kann.

b) Zeige, dass es kein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ geben muss derart, dass alle α_i Nullstellen von F sind.

Aufgabe 25.16. (5 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Es sei $z \in L$ ein Element derart, dass $\varphi(z)$, $\varphi \in G$, eine K-Basis von L bildet. Wir betrachten das Polynom

$$F = \prod_{\varphi \in G} (X - \varphi(z)) .$$

Zeige, dass die Koeffizienten von F zu K gehören, dass F in $K[X]$ irreduzibel ist und dass L der Zerfällungskörper von F über K ist.