Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Es seien L und M metrische Räume und $m \in M$. Zeige, dass die konstante Abbildung

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto m,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.2. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass die Identität

$$X \longrightarrow X,\, x \longmapsto x,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $T \subseteq X$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Zeige, dass die Inklusion $T \subseteq X$ stetig ist.

Aufgabe 20.4. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L mit einem Häufungspunkt $x \in L$. Zeige, dass $f(x)$ ein Häufungspunkt der Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 20.5. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M und sei $P \in L$. Es sei $\epsilon > 0$. Zeige, dass f genau dann in P stetig ist, wenn die eingeschränkte Abbildung

$$\tilde{f} : U(P, \epsilon) \longrightarrow M,\, x \longmapsto f(x),$$

in P stetig ist.

Aufgabe 20.6. Zeige, dass die Addition

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und die Multiplikation

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

stetig sind.

Aufgabe 20.7. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ gilt für alle y aus einer offenen Ballumgebung von x.

Aufgabe 20.8. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |\, x\,|,$$

stetig ist.

Aufgabe 20.9. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 20.10. Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 20.11. Zeige, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ die euklidische Metrik, die Summenmetrik und die Maximumsmetrik dieselben offenen Mengen definieren.

Aufgabe 20.12. Es sei $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik und $Y = \mathbb{R}^n$ mit der diskreten Metrik. Es sei

$$f : Y \longrightarrow X$$

die Identität. Zeige, dass f stetig ist, die Umkehrabbildung f^{-1} aber nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.13. (4 Punkte)

Es seien L, M, N metrische Räume und seien

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen. Es sei f stetig in $x \in L$ und es sei g stetig in $f(x) \in M$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N, \, x \longmapsto g(f(x)),$$

stetig in x ist.

Aufgabe 20.14. (5 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass V abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 20.16. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im $\mathbb{R}^2$ derart, dass die beiden Komponentenfolgen $(z_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ jeweils mindestens einen Häufungspunkt besitzen, die Folge selbst aber nicht.

Aufgabe 20.17. (4 Punkte)

Es sei V ein euklidischer Raum. Zeige, dass die Norm

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, \, v \longmapsto || \, v \, ||,$$

eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 20.18. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass der Graph von f abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 20.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht stetig ist, deren Graph aber abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ ist.