Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 13

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei R eine reduzierte K-Algebra von endlichem Typ. Beweise den *Identitätssatz* in der folgenden Gestalt: Wenn für $f, g \in R$ gilt, dass $f(P) = g(P)$ ist für alle $P \in K-\operatorname{Spek}(R)$, so ist $f = g$.

Aufgabe 13.2. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Man definiert die *Nenneraufnahme*

$$R_S$$

schrittweise wie folgt. Es sei zunächst M die Menge der formalen Brüche mit Nenner in S, also

$$M = \left\{ \frac{r}{s} | \, r \in R, \, s \in S \right\} .$$

Zeige, dass durch

$$\frac{r}{s} \sim \frac{r'}{s'} \text{ genau dann, wenn es ein } t \in S \text{ gibt mit } trs' = tr's$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Wir bezeichnen mit R_S die Menge der Äquivalenzklassen. Definiere auf R_S eine Ringstruktur und definiere einen Ringhomomorphismus $R \to R_S$.

In den folgenden Aufgaben dürfen Sie, wenn Sie wollen, bei Nenneraufnahmen annehmen, dass Integritätsbereiche vorliegen.

Aufgabe 13.3. Seien R und A kommutative Ringe und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Es sei $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus derart, dass $\varphi(s)$ eine Einheit in A ist für alle $s \in S$. Zeige: Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : R_S \longrightarrow A \, ,$$

der φ fortsetzt.

Aufgabe 13.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$ mit zugehöriger Nenneraufnahme R_f. Beweise die R-Algebra-Isomorphie

$$R_f \cong R[T]/(Tf - 1) \, .$$

Aufgabe 13.5.*

Sei K ein Körper, $R = K[X, Y]$ der Polynomring in zwei Variablen, $S \subseteq R$ ein multiplikatives System und $F \in R$ ein Polynom. Zeige, dass es eine eindeutige R-Algebra-Isomorphie

$$(R/(F))_S \cong (R_S)/(F)$$

gibt.

Aufgabe 13.6. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S kommutative K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $f \in R$ und $\varphi : R \to S$ sei ein K-Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass die Spektrumsabbildung φ^* genau dann durch $D(f)$ faktorisiert, wenn $\varphi(f)$ eine Einheit in S ist.

Aufgabe 13.7.*

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine integre endlich erzeugte K-Algebra. Es seien $f, g \in R$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $D(f) \subseteq D(g)$
(2) Es gibt einen R-Algebra-Homomorphismus $R_g \to R_f$.

Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für $K = \mathbb{R}$ nicht gilt.

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff des saturierten multiplikativen Systems.

Ein multiplikatives System S in einem kommutativen Ring R heißt *saturiert*, wenn folgendes gilt: Ist $g \in R$ und gibt es ein $f \in S$, das von g geteilt wird, so ist auch $g \in S$.

Aufgabe 13.8. Seien A, B kommutative Ringe und sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus . Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(B^\times)$ der Einheitengruppe ein saturiertes multiplikatives System in A ist.

Aufgabe 13.9. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der Nichtnullteiler in R ein saturiertes multiplikatives System bilden.

Aufgabe 13.10.*

Man gebe ein Beispiel einer integren, endlich erzeugten $\mathbb{C}$-Algebra R und eines multiplikativen Systems $S \subseteq R$, $0 \notin S$, an derart, dass die Nenneraufnahme R_S kein Körper ist, aber jedes maximale Ideal aus R zum Einheitsideal in R_S wird.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass ein Integritätsbereich ein zusammenhängender Ring ist.

Aufgabe 13.12. Sei R ein kommutativer Ring und sei $f \in R$. Es sei f sowohl nilpotent als auch idempotent. Zeige, dass $f = 0$ ist.

Aufgabe 13.13. Sei R ein kommutativer Ring und sei $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$R_e \cong R/(1-e)$$

gibt.

(Dies zeigt erneut, dass $D(e)$ offen und abgeschlossen ist).

Aufgabe 13.14. Seien R und S kommutative Ringe und sei $R \times S$ der Produktring $R \times S$. Zeige, dass die Teilmenge $R \times 0$ ein Hauptideal ist.

Aufgabe 13.15. Sei X ein topologischer Raum, der nicht leer und nicht zusammenhängend sei. Zeige, dass es dann eine stetige Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0, 1$, ($\mathbb{R}$ sei mit der metrischen Topologie versehen) gibt, die idempotent im Ring der stetigen Funktionen auf X ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.16. (4 Punkte)

Betrachte zwei parallele Geraden V und das Achsenkreuz W. Beschreibe eine möglichst natürliche surjektive Abbildung zwischen V und W (in welche Richtung?), und zwar sowohl geometrisch als auch algebraisch. Gibt es auch eine surjektive polynomiale Abbildung in die andere Richtung?

Aufgabe 13.17. (6 Punkte)

Betrachte die durch $Y^2 = X^3 + X^2$ gegebene Kurve C (siehe Beispiel 6.3) und die offene Menge $U = D(X) \subseteq C$. Finde eine abgeschlossene Realisierung von U in $\mathbb{A}_K^3$ und zeige, dass es auch eine solche Realisierung in $\mathbb{A}_K^2$ gibt. Skizziere die Bildkurve unter der Abbildung

$$U \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{1}{x}, y \right).$$

Ist U isomorph zu einer offenen Menge der affinen Geraden?

Aufgabe 13.18. (3 Punkte)

Bestimme die nilpotenten und die idempotenten Elemente in $\mathbb{Z}/(175)$.

Aufgabe 13.19. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte den Durchschnitt der beiden algebraischen Kurven

$$V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } V(Y - X^2)\,.$$

Identifiziere den Restklassenring

$$R = K[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y - X^2)$$

mit einem Produktring und beschreibe die Restklassenabbildung $K[X,Y] \to R$ mittels dieser Identifizierung. Bestimme Urbilder in $K[X,Y]$ für sämtliche idempotenten Elemente des Produktringes.

Aufgabe 13.20. (6 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R ist reduziert.
(2) Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ist $R_{\mathfrak{p}}$ reduziert.
(3) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ ist $R_{\mathfrak{m}}$ reduziert.

Bemerkung: Man sagt daher, dass Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist.

Man gebe auch ein Beispiel für einen kommutativen Ring, der nicht integer ist, dessen Lokalisierungen an Primidealen aber alle integer sind.

Aufgabe 13.21. (5 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(R)$. Zeige, dass jeder Zwischenring S, $R \subseteq S \subseteq Q$, eine Nenneraufnahme ist.