

Einführung in die Algebra**Arbeitsblatt 12****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 1. Zeige, dass ein Ring mit $0 = 1$ der Nullring ist.

AUFGABE 2. Zeige, dass es keinen echten Zwischenring zwischen \mathbb{R} und \mathbb{C} gibt.

AUFGABE 3. Formuliere und beweise das allgemeine Distributivitätsgesetz für einen Ring.

AUFGABE 4. Sei R ein Ring und seien $S_i \subseteq R$, $i \in I$, Unterringe. Zeige, dass dann auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} S_i$ ein Unterring von R ist.

AUFGABE 5. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Man mache sich dies auch für $k \leq 0$ und $k \geq n$ klar.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 6. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt \cap als Multiplikation und der *symmetrischen Differenz* $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ als Addition ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 7. (2 Punkte)

Sei R ein Ring und seien \spadesuit, \heartsuit und \clubsuit Elemente in R . Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit).$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

AUFGABE 8. (2 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ eine fixierte positive natürliche Zahl. Zeige, dass die Menge aller rationalen Zahlen, die man mit einer Potenz von n als Nenner schreiben kann, einen Unterring von \mathbb{Q} bildet.

Die nächste Aufgabe ist online abzugeben. Legen Sie dazu eine Benutzerseite auf Wikiversity an.

AUFGABE 9. (3 (=2+1) Punkte)

Es sei R ein Ring und es seien $a, b \in R$ Elemente, die *vertauschbar* sind, d.h. es ist $ab = ba$. Zeigen Sie, dass die Binomische Formel auch unter dieser Voraussetzung gilt, indem Sie die Einzelschritte in der Gleichungskette im Beweis zu Satz 12.7 begründen. Sagen Sie jeweils, auf welchem Ringaxiom die Gleichung beruht und wo die Voraussetzung eingeht.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor.

- (1) Legen Sie auf Ihrer Benutzerseite (oder Gruppenseite) eine Unterseite an, in dem Sie die Zeile

[[/Binomischer Lehrsatz/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

 schreiben (d.h. Bearbeiten, Schreiben, Abspeichern; das / vorne ist wichtig).
- (2) Es erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf den roten Link und geben Sie dort

{{:Binomischer Lehrsatz/Vergleichskette/Begründungsfenster}}

 ein.
- (3) Es erscheint der Beweis der Binomischen Formel. Wenn Sie auf eines der Gleichheitszeichen gehen, erscheint ein roter Link. Gehen Sie auf diesen roten Link und geben Sie dort die Begründung für dieses Gleichheitszeichen ein.
- (4) Die Abgabe erfolgt online, indem Sie auf der Abgabeseite (die Sie von der Kursseite auf Wikiversity aus erreichen können) einen Link zu Ihrer Lösung hinterlassen, also dort

[[Benutzername/Binomischer Lehrsatz/Vergleichskette/Einzelbegründungen]]

 hinschreiben.

AUFGABE 10. (2 Punkte)

Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \rightarrow R : f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

Die nächste Aufgabe verwendet einige topologische Begriffe. Man kann dabei einen topologischen Raum durch einen metrischen Raum oder eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ersetzen.

AUFGABE 11. (3 Punkte)

Es sei X ein topologischer Raum und

$$R = C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetige Abbildung}\}.$$

Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist. Man gebe auch ein Beispiel an, das zeigt, dass R im Allgemeinen nicht nullteilerfrei ist.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des *nilpotenten* Elementes in einem Ring.

Ein Element a eines Ringes R heißt *nilpotent*, wenn $a^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n .

AUFGABE 12. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und es seien $f, g \in R$ nilpotente Elemente. Zeige, dass dann die Summe $f + g$ ebenfalls nilpotent ist

Die folgende Aufgabe richtet sich vor allem an diejenigen, die im Proseminar den Begriff einer *trigonalisierbaren Matrix* kennengelernt haben.

AUFGABE 13. (2 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.

Auf welche Matrixgestalt kann man in Dimension zwei und drei eine trigonalisierbare eigentliche Isometrie bringen?