Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

26. Mai 2012

Mathematik für Anwender I

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt in der Regel bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögliche Pkt.:	4	4	2	4	2	4	5	4	6	3	6	3	4	3	5	5	64
erhaltene Pkt.:																	

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Abbildung*
$$F : M \longrightarrow N$$
zwischen zwei Mengen M und N.
(2) Ein *Erzeugendensystem* $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraumes V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix über einem Körper K.
(5) Die *Konvergenz* einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x.
(6) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(8) Eine *Riemann-integrierbare* Funktion
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quotientenkriterium* für eine Reihe.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung*.

AUFGABE 3. (2 Punkte)

Zwei Fahrradfahrer, A und B, fahren auf ihren Fahrrädern eine Straße entlang. Fahrer A macht pro Minute 40 Pedalumdrehungen, hat eine Übersetzung von Pedal zu Hinterrad von 1 zu 6 und Reifen mit einem Radius von 39 Zentimetern. Fahrer B braucht für eine Pedaldrehung 2 Sekunden, hat eine Übersetzung von 1 zu 7 und Reifen mit einem Radius von 45 Zentimetern.

Wer fährt schneller?

AUFGABE 4. (4 Punkte)

Zeige, dass für jede ungerade Zahl n die Zahl $25n^2 - 17$ ein Vielfaches von 8 ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte)
Löse die lineare Gleichung

$$(2+5i)z \;=\; (3-7i)$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 6. (4 (2+2) Punkte)
Es seien die beiden Polynome

$$P = X^2 + 3X - 5 \text{ und } Q = X^2 - 4X + 7$$

gegeben.
a) Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).
b) Berechne die Ableitung von $P(Q)$ direkt und mit Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 7. (5 Punkte)
Es seien

$$g_1, g_2, \ldots, g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

differenzierbare Funktionen. Beweise durch Induktion über n die Beziehung

$$\left(\frac{1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \right)' = \frac{-1}{g_1 \cdot g_2 \cdots g_n} \cdot \left(\frac{g_1'}{g_1} + \frac{g_2'}{g_2} + \ldots + \frac{g_n'}{g_n} \right).$$

Aufgabe 8. (4 Punkte)
Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9. (6 Punkte)
Es sei W ein n-dimensionaler K-Vektorraum (K ein Körper) und seien $U, V \subseteq W$ Untervektorräume der Dimension $\dim(U) = r$ und $\dim(V) = s$. Es gelte $r + s > n$. Zeige, dass $U \cap V \neq 0$ ist.

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

AUFGABE 11. (6 Punkte)

Beweise das Quotientenkriterium für Reihen.

AUFGABE 12. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - 3x + 1.$$

Bestimme, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, mit der Intervallhalbierungsmethode ein Intervall der Länge $1/8$, in dem eine Nullstelle von f liegen muss.

AUFGABE 13. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $f(x) = x + \sin x$ streng wachsend ist.

AUFGABE 14. (3 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

AUFGABE 15. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^2 + 1}{x(x-1)(x-2)}$$

für $x > 2$.

AUFGABE 16. (5 (4+1) Punkte)

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t$$

für $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3) \cos t \ \text{ mit } y(0) = 7\,.$$