Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Fundamentalgruppe und Vektorbündel

Vorlesung 2

Etale Fundamentalgruppe

Zu einem Schema X kann man die Kategorie aller endlichen étalen Morphismen $Y \to X$ betrachten, wobei jeder Morphismus in dieser Kategorie die Basis X festlässt. Die Idee ist dabei, die „universelle Überlagerung", die es im algebraischen Kontext nicht gibt, durch das System aller endlichen Überlagerungen anzunähern.

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit oder allgemeiner ein topologischer Raum. Die universelle Überlagerung

$$p : \tilde{X} \longrightarrow X$$

hat die Eigenschaft, dass die Automorphismengruppe von $\tilde{X}$ über X, also die Menge der Homöomorphismen (Decktransformationen)

$$\psi : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X},$$

die mit p kommutieren, unter schwachen Bedingungen mit der topologischen Fundamentalgruppe von X übereinstimmt. Dies beruht auf der folgenden Konstruktion: Es sei

$$p : Y \longrightarrow X$$

eine Überlagerung und $x \in X$ ein Punkt. Die Faser von p über x sei mit F bezeichnet. Dann gibt es eine natürliche Operation (die sogenannte *Monodromie*) der topologischen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ auf F. Einem stetigen Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$$

mit x als Start- und Zielpunkt und einem Punkt $y \in F$ der Faser wird der eindeutig bestimmte Endpunkt des gelifteten Weges $\tilde{\gamma}$ zugeordnet, der im Punkt y startet (siehe hierzu auch Topologie (Osnabrück 2008/2009)/Vorlesung 17). Dies führt zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(F),\ \gamma \longmapsto (y \mapsto \tilde{\gamma}(1))$$

bzw. einer Operation von $\pi_1(X, x)$ auf F. Diese Zuordnung ist für X zusammenhängend injektiv, da generell für einen zusammenhängenden topologischen Raum Z (z.B. X selbst, oder Y, oder das Einheitsintervall) und einer stetigen Abbildung

$$\gamma : Z \longrightarrow X$$

zwei Liftungen

$$f_1, f_2 : Z \longrightarrow Y$$

mit $f_1(z) = f_2(z)$ für einen einzelnen Punkt $z \in Z$ schon $f_1 = f_2$ gelten muss.

Dieser Gruppenhomomorphismus ist nur in Ausnahmefällen surjektiv. Es muss im Allgemeinen auch keinen Automorphismus geben, der einen Punkt der Faser in einen anderen Punkt der Faser überführt. Diese Eigenschaft führt vielmehr zur folgenden Definition.

DEFINITION 2.1. Eine Überlagerung

$$p : Y \longrightarrow X$$

heißt *normal*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jedem Punktepaar $y_1, y_2 \in p^{-1}(x)$ eine Decktransformation

$$\varphi : Y \longrightarrow Y$$

gibt mit $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$.

Eine normale Überlagerung ist also dadurch gekennzeichnet, dass die Gruppe der Decktransformationen transitiv auf einer jeden Faser operiert. Jeder Punkt $y_1 \in F$ in einer Faser F definiert eine Abbildung

$$\operatorname{Aut}_X(Y) \longrightarrow F,\ \psi \longmapsto \psi(y_1),$$

die stets injektiv und im normalen Fall auch bijektiv ist.

Es ist eine wichtige Eigenschaft von Überlagerungen, dass man zu einer normalen Überlagerung übergehen kann. Diese topologische Eigenschaft ist analog dazu, dass man separable Körpererweiterungen in eine Galoiserweiterung (normale Hülle) einbetten kann.

Liftungseigenschaften von étalen Abbildungen und Galoiserweiterungen

Die beiden oben in Erinnerung gerufenen Eigenschaften von topologischen Überlagerungen, nämlich die eindeutige Liftungseigenschaft und die Normalität, kommen auch im Kontext der algebraischen Geometrie vor.

LEMMA 2.2. *Sei X ein zusammenhängendes Schema und sei*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

eine étaler Schemamorphismus. Es sei

$$s : X \longrightarrow Y$$

ein Schnitt zu φ. Dann ist s eine offene Einbettung. Wenn φ zusätzlich separiert ist, so ist s eine abgeschlossene Einbettung.

SATZ 2.3. *Sei X ein zusammenhängendes Schema und sei*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

ein separierter und étaler Schemamorphismus. Es sei $x \in X$ ein Punkt und es seien

$$s_1, s_2 : X \longrightarrow Y$$

Schnitte zu φ mit $s_1(x) = s_2(x)$. Dann ist $s_1 = s_2$.

SATZ 2.4. *Es sei*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

ein separierter und étaler Schemamorphismus. Es sei Z ein zusammenhängendes Schema über X und seien

$$f_1, f_2 : Z \longrightarrow Y$$

X-Morphismen mit $f_1(z) = f_2(z) = y$ für einen Punkt $z \in Z$ derart, dass auch die zugehörigen Körperhomomorphismen

$$f_1, f_2 : \kappa(y) \longrightarrow \kappa(z)$$

identisch sind. Dann ist $f_1 = f_2$.

Ein endlicher Morphismus ist affin und insbesondere separiert.

Die Gruppe der Decktransformationen wird im algebraisch-geometrischen Kontext folgendermaßen definiert.

DEFINITION 2.5. Zu einem Schemamorphismus

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

nennt man

$$\{\psi : Y \to Y | \, \varphi \text{ ist ein } X\text{-Automorphismus}\}$$

die *Automorphismengruppe*. Sie wird mit $\operatorname{Aut}_X Y$ bezeichnet.

Die Automorphismengruppe (oder Galoisgruppe) sollte man sich im Kontext von Fundamentalgruppen als Gruppe von Decktransformationen vorstellen.

Besonders wichtig sind die galoisschen Morphismen, das sind die étalen Morphismen mit „großer“ Automorphismengruppe und entsprechen den normalen Überlagerungen. Die folgende Definition lehnt sich an der der Normalität an.

DEFINITION 2.6. Es sei

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

ein endlicher étaler Morphismus zwischen zwei zusammenhängenden Schemata. Man nennt φ *galoissch*, wenn es zu jedem Morphismus

$$\psi : x = \operatorname{Spec} K \longrightarrow X$$

(K ein separabel abgeschlossener Körper) und zwei Liftungen

$$\psi_1, \psi_2 : x \longrightarrow Y$$

einen X-Automorphismus

$$\theta : Y \longrightarrow Y$$

gibt mit $\theta \circ \psi_1 = \psi_2$.

Zu einem endlichen étalen Morphismus

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

kann man i.A. einen Morphismus

$$\tilde{Y} \longrightarrow Y$$

finden derart, dass

$$\tilde{Y} \longrightarrow X$$

galoissch ist. Für die Konstruktion der étalen Fundamentalgruppe kann man sich im Wesentlichen auf galoissche Überlagerungen beschränken.

Definition der étalen Fundamentalgruppe

Die Kategorie der endlichen étalen Morphismen

$$Y \longrightarrow X$$

wird mit FEt/X bezeichnet. Für eine Varietät über $\mathbb{C}$ entspricht das der Kategorie aller Überlagerungen mit endlichen Fasern.

Es ist das Ziel, über die Kategorie aller étalen Morphismen bzw. aller dabei auftretenden Automorphismen einen sinnvollen Limes zu bilden. Dazu braucht man eine durch eine Menge indizierte hinreichend feine und reichhaltige Auswahl all dieser Morphismen. Dazu muss man die Morphismen in eine gewisse Ordnung bringen, was man durch ein zusätzliches Datum, eine Punktierung, erreicht.

Es sei X ein zusammenhängendes Schema und $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt von X, also ein Punkt $x \in X$ zusammen mit einem Körperhomomorphismus $\kappa(x) \to \kappa(x)^{\text{sep}}$ in einen separablen Abschluss $\kappa(x)^{\text{sep}}$ des Restekörpers $\kappa(x)$. Dies ist das Gleiche wie ein Schemamorphismus

$$\bar{x} = \operatorname{Spec} \kappa(x)^{\text{sep}} \longrightarrow X$$

und bedeutet die Fixierung eines Basispunktes. Die Faser über x zu einem endlichen étalen Morphismus $Y \to X$ ist endlich. Die Basispunktfixierung kann auf verschiedene Arten zu einer Fixierung in Y geliftet werden. Eine solche Liftung ist einfach ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bar{x} & \longrightarrow & Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X\,. \end{array}$$

Wir setzen

$$F(Y) = \operatorname{Mor}_X(\bar{x}, Y)\,.$$

Ein Element $f \in F(Y)$ ist also eine Liftung des geometrischen Basispunktes $\bar{x}$, und $F(Y)$ ist die geometrische Faser über $\bar{x}$.

Wir betrachten die Zuordnung $Y \mapsto F(Y)$ als einen Funktor (man spricht von dem *Faserfunktor*) von der Kategorie der étalen Überdeckungen in die Kategorie der Mengen. Dieser Funktor ist strikt prorepräsentierbar, d.h. es gibt eine geordnete Menge $(I, \geq)$ und eine durch I induzierte Familie (Y_i, f_i), wobei $Y_i \in FEt/X$ und $f_i \in F(Y_i)$ ist, so dass diese Familie die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) Zu $i \geq j$ gibt es einen surjektiven X-Morphismen

$$\varphi_{ij} : Y_i \longrightarrow Y_j$$

(2) Es ist $\varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ij}$ und $f_j = \varphi_{ij} \circ f_i$.
(3) Zu jedem $Y \in FEt/X$ ist die natürliche Abbildung

$$\operatorname{colim} \operatorname{Mor}(Y_i, Y) \longrightarrow F(Y),\ \psi \longmapsto \psi \circ f_i,$$

eine Bijektion.

Die letzte Bedingung bedeutet dabei insbesondere, dass es zu jedem gegebenen $Y \in FEt/X$ und $h \in F(Y)$ ein Y_i und einen X-Morphismus

$$\psi_i : Y_i \longrightarrow Y,$$

der f_i auf h abbildet.

Die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}_X Y$ operiert auf $F(Y)$ durch

$$\operatorname{Aut}_X Y \times F(Y) \longrightarrow F(Y),\ (\psi, h) \longmapsto \psi \circ h.$$

Diese Operation induziert für jedes $h \in F(Y)$ bei zusammenhängendem Y eine injektive Abbildung

$$\operatorname{Aut}_X Y \longrightarrow F(Y),\ \psi \longmapsto \psi \circ h,$$

da ein Automorphismus $\psi : Y \to Y$ mit $\psi \circ h = \mathrm{id}_Y \circ h = h$ nach Satz 2.4 die Identität sein muss. Insbesondere haben wir also für die Familie (Y_i, f_i) injektive Abbildungen

$$\operatorname{Aut}_X Y_i \longrightarrow F(Y_i),\ \psi \longmapsto \psi \circ f_i.$$

Nach obiger Definition ist Y galoissch über X, wenn diese Abbildung auch (für jedes f_i) surjektiv ist. Für ein $Y \to X$ gibt es einen Morphismus $Y' \to Y$ derart, dass Y' galoissch über X ist. Daher kann man die gegebene Familie durch eine Familie ersetzen, bei der zusätzlich jedes Y_i galoissch ist (und auch zusammenhängend). Das werden wir im folgenden tun und setzen

$$G_i = \operatorname{Aut}_X Y_i$$

und nennen diese Automorphismengruppen auch Galoisgruppen. Zu einem surjektiven Morphismus

$$\psi : Y' \longrightarrow Y$$

zwischen galoisschen Überdeckungen gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Aut}_X Y' & \xrightarrow{\cong} & F(Y') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Aut}_X Y & \xrightarrow{\cong} & F(Y) \end{array}.$$

Dabei geht $f \in F(Y')$ auf $\psi \circ f \in F(Y)$ und dies legt den surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Aut}_X\, Y' \longrightarrow \mathrm{Aut}_X\, Y$$

fest. Insgesamt erhalten wir über diese Konstruktion einen Funktor

$$I \longrightarrow \mathcal{G}ruppe,\ i \longmapsto G_i,$$

wobei zu $i \geq j$ der soeben definierte Gruppenhomomorphismus

$$\vartheta_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$$

gehört. Die surjektiven Gruppenhomomorphismen haben also die gleiche Richtung wie die Morphismen. Statt dem Kolimes betrachtet man aber jetzt den projektiven Limes über dieses System. Man setzt

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) = \varprojlim_{i \in I} G_i$$

und nennt dies die *étale Fundamentalgruppe* von X im Punkt $\bar{x}$. Sie ist also eine Komplettierung von endlichen Gruppen, ihre Elemente bestehen aus Folgen $g_i \in G$, $i \in I$, die die Bedingung $\varphi_{ij}(g_i) = g_j$ erfüllen. Zu jedem i gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x}) \longrightarrow G_i.$$

Für einen anderen Basispunkt ergibt sich eine isomorphe Gruppe (es gibt aber keinen kanonischen Isomorphismus), wobei die Basispunkte noch nicht einmal abgeschlossen sein müssen.

Bemerkung 2.7. Es sei K ein Körper und

$$K \longrightarrow K^{\text{sep}}$$

eine Einbettung in einen separablen Abschluss. Die étalen Morphismen entsprechen den separablen K-Algebren A, das sind endlichdimensionale K-Algebren, die das direkte Produkt von Körpern $A = K_1 \times \cdots \times K_m$ sind, die alle separable Körpererweiterungen von K sind. Insbesondere treten hierbei die endlichen separablen Körpererweiterungen $K \subseteq L$ auf. Eine Punktierung von Spec A durch Spec K^{sep} ist ein K-Algebra-Homomorphismus

$$A \longrightarrow K^{\text{sep}},$$

der durch einen der Körper K_j faktorisiert. Wenn A galoissch ist, so sind alle K_j untereinander isomorph und selbst eine endliche galoissche Körpererweiterung von K. Wenn Spec A nicht zusammenhängend ist, so kann die Automorphismengruppe größer als die Faser sein. Man denke an die n-fache disjunke Vereinigung des Grundpunktes mit sich selbst. Die Automorphismengruppe besitzt dann $n!$ Elemente. Da man sich bei der Konstruktion der étalen Fundamentalgruppe auf zusammenhängende Erweiterungen beschränken kann, können wir uns auf eine Familie von galoisschen Körpererweiterungen beschränken. Dabei kann man überhaupt alle über K endlichen und galoisschen Zwischenkörper L, $K \subseteq L \subseteq K^{\text{sep}}$, als Indexmenge nehmen. Somit ist $\pi_1^{\text{ét}}(\text{Spec } K, \bar{x}) = \text{Gal}\,(K^{\text{sep}}|K)$ die *absolute Galoisgruppe* von K.

Bemerkung 2.8. Zu einem integren normalen Schema X ist es relativ einfach, eine geordnete Menge anzugeben, die sämtliche Galoisüberdeckungen von X erfasst (im Sinne der Prorepräsentierung). Man betrachtet den Funktionenkörper $K = K(X)$ und startet wie in Bemerkung 2.7 mit der Menge aller endlichen Galoiserweiterungen $K \subseteq L$ mit $L \subseteq K^{\text{sep}}$, wobei K^{sep} ein separabler Abschluss von K ist. Man beschränkt sich dann auf diejenigen Erweiterungen $K \subseteq L$, für die der integrale Abschluss von X in L selbst étale (und dann automatisch galoissch) ist (diese Auswahl konstituiert also die Indexmenge, wobei die natürliche Inklusion die Ordnung festlegt). Die Abbildung

$$\text{Spec } K^{\text{sep}} \longrightarrow \text{Spec } L \longrightarrow Y$$

definiert dabei die Punktierung von Y über der Basispunktierung Spec $K^{\text{sep}} \to$ Spec $K \to X$, d.h. man nimmt den generischen Punkt des Schemas als Basispunkt.

Beispiel 2.9. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $X = \mathbb{A}^\times = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ die punktierte Gerade, wobei wir den Punkt $1 \in X$ fixieren. Die zusammenhängenden galoisschen Überdeckungen sind

$$X_n = X \longrightarrow X,\, t \longmapsto t^n,$$

mit der Galoisgruppe $G_n = \mu_n(K) \cong \mathbb{Z}/(n)$, wobei n kein Vielfaches der Charakteristik ist. Als Indexmenge I kann man die natürlichen Zahlen ohne die Vielfachen der Charakteristik zusammen mit der durch die Teilbarkeit gegebenen Ordnung nehmen. Für $n|m$ gibt es natürliche Morphismen

$$X_m \longrightarrow X_n,\, t \longmapsto t^{m/n},$$

wobei

$$G_m \longrightarrow G_n$$

surjektiv ist (ein Erzeuger wird also auf einen Erzeuger abgebildet, bzw. eine primitive Einheitswurzel wird auf eine primitive Einheitswurzel abgebildet). Die étale Fundamentalgruppe ist also

$$\varprojlim_{n \in \mathbb{N},\, p \nmid n} \mathbb{Z}/(n) = \prod_{\ell \text{ prim} \neq p} \hat{\mathbb{Z}}_\ell \,.$$

Die beiden folgenden Sätze zeigen, dass die étale Fundamentalgruppe wichtige erwünschte Eigenschaften erfüllt.

Satz 2.10. *Es sei X ein zusammenhängendes Schema und $\bar{x}$ ein geometrischer Punkt von X mit der étalen Fundamentalgruppe $\pi = \pi_1^{\text{ét}}(X, \bar{x})$. Dann induziert der Faserfunktor*

$$FEt/X \longrightarrow \pi - \text{Mengen},\, Y \longmapsto F(Y),$$

eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlichen étalen Schemata über X und der Kategorie der endlichen Mengen, auf denen eine stetige Operation von π gegeben ist.

Die Stetigkeit bedeutet dabei, dass die Operation über eine endliche Restklassengruppe faktorisiert.

Aus dem Riemannschen Existenzsatz folgt für $K = \mathbb{C}$ der folgende wichtige Vergleichssatz zwischen étaler und topologischer Fundamentalgruppe.

SATZ 2.11. *Es sei X eine glatte Varietät über $\mathbb{C}$, $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt und $X_{\mathbb{C}}$ die zugehörige komplexe Mannigfaltigkeit. Dann besteht zwischen der étalen Fundamentalgruppe und der topologischen Fundamentalgruppe die Beziehung*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = (\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x))\widehat{\ },$$

d.h. die étale Fundamentalgruppe ist die proendliche Komplettierung der topologischen Fundamentalgruppe.

Insbesondere definiert ein geschlossener Weg

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$$

ein Element in der étalen Fundamentalgruppe, das man direkt angeben kann. Zu $i \in I$ und der zugehörigen galoisschen Überdeckung

$$\varphi_i : Y_i \longrightarrow X$$

besitzt die Liftung $\tilde{\gamma}$ mit dem Startpunkt f_i einen eindeutig bestimmten Endpunkt $\tilde{\gamma}(1) \in F(Y)$, dem ein eindeutiger Automorphismus $g_i \in G_i$ entspricht. Die Familie g_i, $i \in I$ ist verträglich und definiert das zugehörige Element in der étalen Fundamentalgruppe.