Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 7

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 7.1. Zeige, dass die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7.2. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $X \subseteq M$ eine Teilmenge. Wir definieren die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, X)$, wobei $d(x, X) := \inf\{d(x, y) : y \in X\}$. Zeige, dass f Lipschitz-stetig mit Konstante 1 ist.

Aufgabe 7.3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeige, dass f mindestens einen Fixpunkt besitzt, d.h., es gibt ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass $\sin x$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7.5. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$. Wir definieren $T_\epsilon(M) := \{x \in \mathbb{R} :| x - a |> \epsilon$ für alle $a \in M\}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Falls M offen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ abgeschlossen.
(2) Falls M abgeschlossen ist, so ist $T_\epsilon(M)$ offen.
(3) Die Umkehrungen der ersten beiden Aussagen sind falsch.

Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne Klausurberechtigung)

Aufgabe 7.6. (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7.7. (4 Punkte)

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft, dass $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$ gilt. Zeige, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = g(x)$.