

Fundamentalgruppe und Vektorbündel

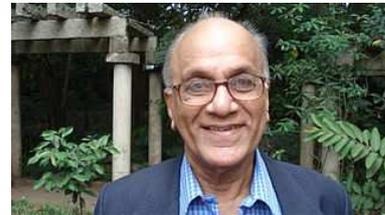
Vorlesung 4

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass man mit lokal integrablen linearen Zusammenhängen auf Vektorbündeln lineare Darstellungen der topologischen Fundamentalgruppe erhalten kann (und umgekehrt). Da die allgemeine lineare Gruppe $GL_r(\mathbb{K})$ eine Vielzahl von interessanten Untergruppen enthält, ist die Frage naheliegend, ob Eigenschaften von Vektorbündeln mit Eigenschaften von Untergruppen in Verbindung gebracht werden können. Ferner ist es natürlich, sich zu fragen, ob es entsprechend auch eine algebraische Theorie gibt, bei der lineare Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe untersucht werden. Da bei $K = \mathbb{C}$ die topologische und die étale Fundamentalgruppe dieselben endlichen Restklassengruppen besitzen, ist insbesondere auch die Frage von Interesse, welches Vektorbündel einer linearen Darstellung entspricht, deren Bild in der linearen Gruppe endlich ist (eine stetige Darstellung der étalen Fundamentalgruppe besitzt stets ein endliches Bild).

Der folgende klassische Satz von Narasimhan-Seshadri gibt eine darstellungstheoretische Charakterisierung von stabilen Vektorbündeln auf kompakten riemannschen Flächen.



M. S. Narasimhan



C. S. Seshadri

SATZ 4.1. *Es sei X eine kompakte riemannsche Fläche. Dann entsprechen sich stabile holomorphe Vektorbündel vom Rang r über X und unitäre irreduzible $GL_r(\mathbb{C})$ -Darstellungen der topologischen Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$.*

Unitär bedeutet einfach, dass die Darstellung die Gestalt

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow U_r(\mathbb{C}) \subseteq GL_r(\mathbb{C})$$

besitzt, wobei $U_r(\mathbb{C})$ die *unitäre Gruppe* ist, also die Gruppe der komplexen $r \times r$ -Matrizen, die das komplexe Skalarprodukt respektieren. Eine kompakte riemannsche Fläche ist dasselbe wie eine projektiv-algebraische Kurve über \mathbb{C} , und auch die Theorie der algebraischen Vektorbündel und der holomorphen Vektorbündel entsprechen sich nach einem Satz von Serre. Daher ist das Konzept der stabilen Vektorbündel algebraischer Natur. Dagegen nimmt

das Konzept der unitären Darstellungen explizit auf die komplexen Zahlen (z.B. auf die komplexe Konjugation) Bezug, so dass es sich hierbei um eine komplex-geometrische Theorie handelt, die sich nicht algebraisieren lässt.

Dieser Satz wurde später in höhere Dimensionen verallgemeinert, worauf wir hier nicht eingehen können (die sogenannte Kobayashi-Hitchin-Korrespondenz zwischen der Stabilität von Vektorbündeln und der Existenz von Einstein-Hermite Metriken. Wichtige Beiträge von Kobayashi, Lübke, Donaldson, Uhlenbeck, Yau).

Étale-trivialisierbare Vektorbündel

Wir kehren zur algebraischen Situation zurück und betrachten stetige lineare Darstellungen der étalen Fundamentalgruppe.

SATZ 4.2. *Es sei X eine zusammenhängende projektive Varietät über einem Körper K und sei $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$ die zugehörige étale Fundamentalgruppe. Dann sind für $r \in \mathbb{N}$ folgende Strukturen äquivalent (jeweils bis auf Isomorphie).*

- (1) *Eine stetige Darstellung*

$$\rho : \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \longrightarrow \text{GL}_r(K).$$

- (2) *Eine galoissche Überlagerung $\varphi : Y \rightarrow X$ mit einer Galoisgruppe H , die äquivariant, treu und linear auf $\mathbb{A}_Y^r = Y \times \mathbb{A}^r$ operiert.*
- (3) *Ein Vektorbündel E vom Rang r auf X zusammen mit einer galoisschen Überlagerung $\varphi : Y \rightarrow X$ derart, dass φ^*E trivial ist (aber für keine galoissche Überlagerung, die echt dazwischen liegt, trivial wird).*

Beweis. Wir betrachten zuerst die Äquivalenz von (1) und (2). Die stetige Darstellung ρ faktorisiert durch eine endliche Untergruppe $H \subseteq \text{GL}_r(K)$. Somit ist H eine endliche Restklassengruppe der étalen Fundamentalgruppe. Also gibt es aufgrund der Konstruktion der étalen Fundamentalgruppe eine galoissche Überlagerung

$$\varphi : Y \longrightarrow X,$$

deren Galoisgruppe gleich H ist (mit X als Quotient). Mittels ρ definieren wir eine Operation von H auf $Y \times \mathbb{A}^r$ durch

$$h(y, w) = (hy, \rho(h)w).$$

Diese Operation ist linear in der zweiten Komponente und treu, da ja H als Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe gegeben ist. Ferner ist die Operation mit der Operation von H auf Y verträglich, da ja in der ersten Komponente die Operation von H auf Y steht.

Wenn umgekehrt eine Operation von H auf $Y \times \mathbb{A}^r$ gegeben ist, die in der zweiten Komponente linear ist, so führt diese Operation von H auf \mathbb{A}^r zu

einem Gruppenhomomorphismus

$$H \longrightarrow \mathrm{GL}_r(K).$$

Diese Abbildung induziert die Darstellung

$$\rho : \pi_1^{\mathrm{\acute{e}t}}(X, x) \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{GL}_r(K).$$

Man beachte, dass die Eigenschaften von Y , projektiv und zusammenhängend zu sein, sicher stellen, dass die Treueheit der Operation eine Eigenschaft der Isomorphieklasse der Operation ist (dies muss für affines Y nicht gelten, siehe Beispiel 4.5).

Die Äquivalenz von (2) und (3) ist ein Spezialfall des treuflachen Abstiegs. Man beachte, dass die Vektorbündelstruktur auf dem absteigenden Schema sich in den Abstiegsdaten darin widerspiegelt, dass der Schemaisomorphismus ein Vektorbündelisomorphismus ist, bzw. darin, dass die Gruppenoperation linear ist. \square

Wir erklären kurz das Prinzip des treuflachen Abstiegs, der dieser und ähnlichen Konstruktionen zugrunde liegt.

SATZ 4.3. *Sei*

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

ein treuflacher quasikompakter Schemamorphismus. Dann sind folgende Daten äquivalent.

- (1) *Ein Schema W über X .*
- (2) *Ein Schema W' über Y zusammen mit einem $Y \times_X Y$ -Isomorphismus*

$$\phi : p_1^*(W') \longrightarrow p_2^*(W'),$$

der auf $Y \times_X Y \times_X Y$ die (Verträglichkeits)Bedingung

$$p_{13}^*(\phi) = p_{23}^*(\phi) \circ p_{12}^*(\phi)$$

erfüllt (dabei handelt es sich um eine Abbildung von $q_1^(W')$ nach $q_3^*(W')$).*

Dabei bezeichnen p_1, p_2 die beiden Projektionen von $Y \times_X Y$ auf die einzelnen Komponenten, q_1, q_2, q_3 die drei Projektionen von $Y \times_X Y \times_X Y$ auf die einzelnen Komponenten und p_{12}, p_{13}, p_{23} die drei Projektionen von $Y \times_X Y \times_X Y$ nach $Y \times_X Y$, wobei die Indizes die beteiligten Komponenten angeben. Es ist

$$p_1 \circ p_{12} = q_1, p_2 \circ p_{12} = q_2, p_1 \circ p_{13} = q_1, p_2 \circ p_{13} = q_3, p_1 \circ p_{23} = q_2, p_2 \circ p_{23} = q_3.$$

Ein Schema W über X (mit $W' = \varphi^*W$) führt wegen $\varphi \circ p_1 = \varphi \circ p_2$ zu einem natürlichen Isomorphismus

$$(\varphi \circ p_1)^*(W) = p_1^*(W') \longrightarrow (\varphi \circ p_2)^*(W) = p_2^*(W'),$$

der die Verträglichkeitsbedingung erfüllt.

Wenn umgekehrt ein Schema W' über Y gegeben ist zusammen mit einem verträglichen Isomorphismus

$$\phi : p_1^*(W') \longrightarrow p_2^*(W'),$$

so erhält man das Abstiegsschema W durch eine Equalizerkonstruktion. Ein Schnitt s in W' über Y (bzw. einer offenen Menge davon) legt einen Schnitt in dem zu konstruierenden Schema W fest, wenn die beiden über $Y \times_X Y$ zurückgezogenen Schnitte p_1^*s und p_2^*s durch ϕ ineinander überführt werden.

Wenn

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

eine galoissche Überlagerung mit Galoisgruppe H ist und

$$\mu : Y \times H \longrightarrow Y$$

die zugehörige Operation, so liegt die Isomorphie

$$p_1 \times \mu : Y \times H \longrightarrow Y \times_X Y, (y, h) \longmapsto (y, hy),$$

vor, wobei die Abbildung für die Punkte hingeschrieben wurde. Das Produkt links ist über dem Grundkörper zu nehmen, wobei H als ein endliches konstantes Gruppenschema aufgefasst wird. Die Isomorphie ist eine äquivalente Charakterisierung für eine galoissche Überlagerung. Man spricht von H -Hauptfaserbündeln (oder H -Torsoren), wobei sich in dieser Sprache auch Operationen von nicht étalen Gruppenschemata gleichermaßen erfassen lassen (das bildet die Grundlage für Noris Fundamentalgruppe).

Um den treuflachen Abstieg auf die Situation einer Gruppenoperation anwenden zu können, ist das folgende kommutative Diagramm entscheidend.

$$\begin{array}{ccccccc} Y \times_X Y \times_X Y & \xrightarrow{q_{ij}} & Y \times_X Y & \xrightarrow{p_i} & Y \\ p_1 \times \mu_2 \times \mu_3 \uparrow & & \uparrow p_1 \times \mu & & \uparrow \text{id} \\ Y \times H \times H & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & Y \times H & \xrightarrow{p_1, \mu} & Y. \end{array}$$

Dabei schreiben wir μ_2 (μ_3) für die Operation μ auf der ersten und zweiten (ersten und dritten) Komponente. Die Abbildungen unten links sind

$$\varphi_{12}(y, g, h) = (y, g), \varphi_{13}(y, g, h) = (y, h), \varphi_{23}(y, g, h) = (gy, g^{-1}h)$$

(diese kommutieren mit den p_{ij}).

Sei $Y \times W$ ein triviales Bündel (also $W = \mathbb{A}^r$) über Y und sei ein $Y \times H$ -Isomorphismus

$$\Phi : p_1^*(Y \times W) = Y \times H \times W \longrightarrow \mu^*(Y \times W) = (Y \times H) \times_{\mu, Y} (Y \times W)$$

gegeben. Diese Abbildung ist in der $Y \times H$ -Komponente die Identität und hängt damit allein von der Abbildung nach $Y \times W$ ab. Da es eine Abbildung über Y ist, muss die Abbildung nach Y gleich μ sein, so dass der Morphismus Φ allein durch

$$Y \times H \times W \longrightarrow W$$

festgelegt ist. Wenn weiter Y projektiv und zusammenhängend ist, so faktorisiert, da H und W affine Schemata sind, diese Abbildung durch $H \times W$. Es liegt dann eine (nicht notwendigerweise lineare) Gruppenoperation vor. Das absteigende Schema wird in diesem Fall durch den Quotienten im Sinne der Invariantentheorie beschrieben, d.h. die absteigenden Schnitte sind die Schnitte, die unter der Gruppenoperation auf sich selbst abgebildet werden.

KOROLLAR 4.4. *Es sei X eine projektive zusammenhängende Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K . Es sei*

$$\pi_1^{\text{ét}}(X, x) \longrightarrow \text{GL}_r(K)$$

eine nichttriviale lineare Darstellung der étalen Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{ét}}(X, x)$. Dann ist das gemäß Satz 4.2 zugehörige Vektorbündel E auf X nichttrivial.

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.2.

Wir geben noch einen Beweis, der sich stärker an der Invariantentheorie orientiert. Sei

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

die étale Überlagerung mit der Galoisgruppe H und der linearen äquivarianten Operation von H auf $Y \times \mathbb{A}^r$, die der Darstellung entspricht, und sei E das zugehörige Bündel auf X . Die Schnitte in E über X entsprechen den H -invarianten Schnitten von \mathbb{A}^r über Y . Da Y projektiv und zusammenhängend ist, liegt die Beziehung

$$\Gamma(X, E) = \Gamma(Y, \mathbb{A}^r)^H \subseteq \Gamma(Y, \mathbb{A}^r) = K^r$$

vor. Wir zeigen, dass nicht alle globalen Schnitte H -invariant sind. Dann besitzt E weniger als r linear unabhängige globale Schnitte und kann daher nicht trivial sein. Da die Darstellung nichttrivial ist, gibt es ein $h \in H$, das nicht wie die Identität operiert. Dann gibt es aber auch einen Vektor $v \in K^r$ mit $hv \neq v$. Der entsprechende konstante Schnitt in \mathbb{A}^r über Y ist nicht H -invariant. \square

BEISPIEL 4.5. Wir betrachten die durch $s \mapsto s^n = t$ definierte endliche étale Abbildung

$$Y = \mathbb{A}^\times \longrightarrow X = \mathbb{A}^\times.$$

Es sei μ_n die Gruppe der n -ten Einheitswurzeln, die in natürlicher Weise aus Y operiert und deren Quotient X ist (n sei kein Vielfaches der Charakteristik). Die Operation lässt sich auf das triviale Geradenbündel $Y \times \mathbb{A}^1$ fortsetzen, z.B. durch

$$\zeta * (s, v) = (\zeta s, \zeta v).$$

Da die affine Gerade das einzige Geradenbündel auf X ist, muss gemäß dem flachen Abstieg der Quotient dieser Operation auf dem Bündel gleich dem trivialen Bündel sein, obwohl die Operation nicht trivial „aussieht“. Der Punkt

ist, dass diese Operation isomorph zur (in der Bündelkomponente) trivialen Operation ist. Die Operation

$$\zeta \cdot (s, u) = (\zeta s, u)$$

wird nämlich durch die Bündelisomorphie $u \mapsto s^{-1}v$, $v \mapsto su$ in die erste Operation überführt.

Wenn man X und Y durch die affinen Geraden $\tilde{X} = \mathbb{A}^1$ und $\tilde{Y} = \mathbb{A}^1$ ersetzt, so ist die durch $s \mapsto s^n = t$ gegebene Abbildung ebenfalls treuffach, aber nicht mehr étale. Dies bedeutet insbesondere, dass kein Isomorphismus zwischen $\tilde{Y} \times_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ und $\tilde{Y} \times H$ vorliegt. In der Tat ist ja $\tilde{Y} \times H$ die $\#(H)$ -fache disjunkte Kopie von \tilde{Y} , während

$$\begin{aligned} \tilde{Y} \times_{\tilde{X}} \tilde{Y} &= \text{Spec } K[s] \otimes_{K[t]} K[s] \\ &= \text{Spec } K[s, \tilde{s}, t]/(s^n - t, \tilde{s}^n - t) \\ &= \text{Spec } K[s, \tilde{s}]/(s^n - \tilde{s}^n) \end{aligned}$$

(bei K algebraisch abgeschlossen) die Vereinigung von n Geraden im Nullpunkt ist.

In Folge dieses Unterschieds fallen auch die Abstiegsbedingung und die Invariantenbedingung auseinander. Es gibt nach wie vor nur das triviale Geradenbündel auf \tilde{Y} mit der trivialen Operation und dem trivialen Abstieg. Die Operationen $*$ von μ_n auf $\tilde{Y} \times \mathbb{A}^1$ ist nicht mehr isomorph zur trivialen Operation, die oben über Y angegebene Isomorphie bricht zusammen, da s^{-1} nicht mehr zur Verfügung steht. Die nicht-triviale Operation erfüllt nicht mehr die Verträglichkeitsbedingung und hat daher keinen Abstieg.

Das Quotientenschema (im Sinne der Invariantentheorie, also das Spektrum des Invariantenrings) ist für $n \geq 2$ kein Geradenbündel über X , sondern enthält über dem Nullpunkt eine nichtreduzierte Faser mit einer Singularität. Der Invariantenring der Operation ist

$$K[s, v]^{\mu_n} = K[s^n, s^{n-1}v, \dots, sv^{n-1}, v^n],$$

der als $K[s^n] = K[t]$ -Algebra zu betrachten ist. Wenn man $t = s^n$ invertiert, so kann man $s^{n-i}v^i = (s^{-n})^{i-1}(s^{n-1}v)^i$ für $i \geq 2$ schreiben und erhält das triviale Geradenbündel zu den Koordinaten s^n und $s^{n-1}v$.

Bei $n = 2$ handelt es sich bei der Operation $*$ um die Punktspiegelung der affinen Ebene $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ am Nullpunkt über der Punktspiegelung der affinen Geraden $\tilde{Y} = \mathbb{A}^1$. Dabei wird die Faser über dem Nullpunkt auf sich selbst abgebildet (aber „umgeklappt“). Für den Invariantenring liegt die Situation $K[t] \subseteq K[s^2, sv, v^2] \cong K[a, b, c]/(ac - b^2)$ vor (mit $a = t = s^2$, $b = sv$, $c = v^2$), wobei die Faser zu $a = 0$ durch $K[b, c]/(b^2)$ beschrieben wird, also nicht reduziert ist. Der Rückzug dieses Schemas nach \tilde{Y} ist

$$\begin{aligned} \text{Spec } (K[t] \otimes_{K[s]} K[a, b, c]/(ac - b^2)) &= \text{Spec } K[t, s, a, b, c]/(tc - b^2, t - s^2, a - s^2) \\ &= \text{Spec } K[s, b, c]/(s^2c - b^2). \end{aligned}$$

Dies ist ein nicht normales Schema und insbesondere nicht isomorph zur affinen Gerade (wie dies bei der Abstiegskorrespondenz wäre), und die Faser über $s = 0$ ist nicht reduziert. Da dieses Schema von \tilde{X} herkommt, erfüllt es wiederum die Abstiegsbedingung.

BEISPIEL 4.6. Es sei S ein kommutativer Ring der positiven Charakteristik p und sei $S[u, v]$ der Polynomring in zwei Variablen über S , wodurch das triviale Vektorbündel

$$Y \times \mathbb{A}^2 = \text{Spec } S[u, v] \longrightarrow Y = \text{Spec } S$$

über $\text{Spec } S$ beschrieben wird. Wir betrachten den durch

$$u \longmapsto u + v^n, v \longmapsto v,$$

beschriebenen Y -Automorphismus θ von $Y \times \mathbb{A}^2$ mit fixiertem n . Bei $n \geq 2$ ist dies kein Vektorbündelisomorphismus. Wegen $\theta^i(u) = u + iv^n$ ist die Ordnung dieses Automorphismus gleich p . Dieser Automorphismus gibt also Anlass zu einer nicht-linearen Operation von $H = \mathbb{Z}/(p)$ auf dem trivialen Bündel vom Rang zwei (zu den invarianten Polynomen gehört neben v auch $\prod_{i=0}^{p-1} (u + iv^n)$). Wenn zusätzlich H fixpunktfrei auf Y operiert mit dem Quotienten X (so dass also

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

étale ist; solche Beispiele gibt es), so steigt \mathbb{A}_Y^2 ab zu einem Schema E über X , das aber kein Vektorbündel ist.

Im Gegensatz zu den linearen Operationen einer endlichen Gruppe lässt sich dieser Typ auch deformieren, man denke an die von $g \in S$ abhängige, durch $u \mapsto u + gv^n, v \mapsto v$, gegebene Operation.

BEMERKUNG 4.7. Ein Vektorbündel E auf X wird durch eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit lokalen verträglichen Identifizierungen $E|_{U_i} \cong \mathbb{A}_{U_i}^r$ beschrieben. Die über $U_{ij} = U_i \cap U_j$ gegebenen Übergangsabbildungen $\varphi_{ij} \in \text{GL}_r(\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_X))$ definieren eine Čech-Kohomologiekategorie und somit ein Element in der nicht-abelschen Kohomologie $H^1(X, \text{GL}_r(-))$ (das ist lediglich eine Menge, die die Isomorphieklassen von Vektorbündeln repräsentiert, aber keine Gruppe). Es ist verlockend zu vermuten, dass die durch eine galoissche Überlagerung

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

mit Galoisgruppe G trivialisierbaren Vektorbündel E durch Kohomologieklassen $c \in H^1(X, \text{GL}_r(-))$ repräsentiert werden, die von einer Klasse $\tilde{c} \in H^1(X, G)$ via einer Darstellung

$$H^1(X, G) \longrightarrow H^1(X, \text{GL}_r(-))$$

herrühren. Bei einem integren Schema X besitzt aber eine endliche Gruppe G auf jeder offenen Menge nur die konstanten Schnitte, so dass die Kohomologiemenge $H^1(X, G)$ in der Zariski-Topologie trivial ist.

Dies ändert sich, wenn man statt mit der Zariski-Topologie mit der étalen oder der treuflachen Topologie arbeitet. Die Menge $H^1(X_{\text{ét}}, G)$ klassifiziert die étalen G -Hauptfaserbündel über X . Wenn eine Darstellung

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_r(K)$$

und ein étales G -Hauptfaserbündel

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$

gegeben ist, so wird die zugehörige Klasse $\tilde{c} \in H^1(X_{\text{ét}}, G)$ auf Y zu 0, und dasselbe gilt für die Kohomologieklassse $c = \rho(\tilde{c}) \in H^1(X_{\text{ét}}, \mathrm{GL}_r(K)) = H^1(X, \mathrm{GL}_r(K))$ (Vektorbündel in der Zariski- und in der étalen Topologie sind äquivalent), so dass das durch c repräsentierte Vektorbündel $E(c)$ auf X über Y trivialisiert.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = SeshadriinBengaluru2010 182.JPG, Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1
Quelle = NarasimhaninBengaluru2010 214.jpg, Autor = Benutzer Bocardodarapti auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	1