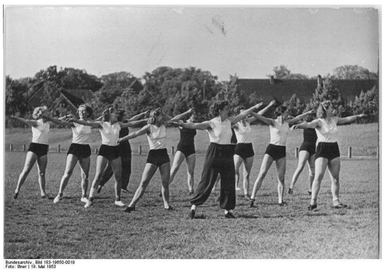
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 3

Wir beginnen mit Aufgaben zum Aufwärmen.



Aufgabe 1. Zeige, dass für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die folgenden Beziehungen äquivalent sind.

(1) a teilt b (also $a|b$).
(2) $b \in \mathbb{Z}a$.
(3) $\mathbb{Z}b \subseteq \mathbb{Z}a$.

Aufgabe 2. Zeige, dass für je zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ aus

$$a|b \text{ und } b|a$$

die Beziehung $a = \pm b$ folgt.

Aufgabe 3. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a, b) \longmapsto (a - b)\,.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Die „echten“ Aufgaben.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $x \in G$ ein Element. Beweise durch Induktion unter Verwendung der Potenzgesetze, dass für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$x^{mn} = (x^m)^n\,.$$

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Es sei G eine Gruppe, $x \in G$ ein Element und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Zeige, dass die Menge

$$M = \{k \in \mathbb{Z} : \, x^k \in H\}$$

die Form $M = \mathbb{Z}d$ besitzt mit einer eindeutig bestimmten ganzen Zahl $d \geq 0$.

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Beweise die Teilbarkeitsregeln für ganze Zahlen, die in Lemma 3.7 aufgelistet sind.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Menge von ganzen Zahlen. Zeige, dass der nichtnegative größte gemeinsame Teiler der a_i mit demjenigen gemeinsamen Teiler übereinstimmt, der bezüglich der Ordnungsrelation $\geq$ der größte gemeinsame Teiler ist.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gibt es für jedes $s \in K$ eine ganze Zahl q und ein $t \in K$ mit $0 \leq t < 1$ und mit

$$s = q + t\,.$$

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Betrachte die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ als kommutative Gruppe. Es sei $G \subseteq \mathbb{Q}$ eine endlich erzeugte Untergruppe. Zeige, dass G zyklisch ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Es sei Z eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung 12. Wie viele Untergruppen gibt es darin?

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Betrachte ein gleichseitiges Dreieck in der x,y-Ebene mit $(0,0)$ als Mittelpunkt und mit $(1,0)$ als einem der Eckpunkte. Betrachte darüber die doppelte Pyramide D mit oberer Spitze $(0,0,2)$ und unterer Spitze $(0,0,-2)$. Bestimme die Matrizen der (eigentlichen) Bewegungen, die D in sich überführen, ihre Drehachsen und erstelle eine Verknüpfungstabelle für diese Bewegungen.

Beschreibe ferner, was unter diesen Bewegungen mit den drei Eckpunkten des zugrundeliegenden Dreiecks geschieht.

Abbildungsverzeichnis