Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung, deren Grad eine Primzahl sei. Zeige, dass dann eine einfache Körpererweiterung vorliegt.

Aufgabe 12.2. Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass $K \subset L$ eine einfache, aber keine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein separables Polynom. Zeige, dass ein Teiler $F \in K[X]$ von P ebenfalls separabel ist.

Aufgabe 12.4. Sei K ein Körper. Ist ein konstantes Polynom $P \in K[X]$ separabel?

Aufgabe 12.5. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche separable Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Zeige, das auch $M \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

In den nächsten Aufgaben verwenden wir die folgende Definition.

Ein Körper K heißt *vollkommen*, wenn jedes irreduzible Polynom $P \in K[X]$ separabel ist.

Aufgabe 12.6. Es sei K ein vollkommener Körper und $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.7. Zeige, dass jeder Körper der Charakteristik 0 vollkommen ist.

Aufgabe 12.8. Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper vollkommen ist.

Aufgabe 12.9. Zeige, dass der Körper $\mathbb{F}_p(X)$ der rationalen Funktionen nicht vollkommen ist.

Aufgabe 12.10. Man gebe ein Beispiel für eine endliche einfache Körpererweiterung $K \subseteq L$, die nicht separabel ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (6 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von null verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die zugehörige Polynomfunktion

$$F : K^n \longrightarrow K, \, (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto F(a_1, \ldots, a_n),$$

nicht die Nullfunktion ist.

Aufgabe 12.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass es unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und L gibt.

Aufgabe 12.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Es sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, $M \neq K$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass $M \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.14. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$K(X^p, Y^p) \subseteq K(X, Y) \, .$$

Zeige, dass dies keine einfache Körpererweiterung ist.