Mathematik II

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2010/2011

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik II wieder, die ich im Sommrtsemester 2010 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte, die im direkten Anschluss an die einzelnen Vorlesungen öffentlich gemacht wurden. Ich habe diese Veranstaltung zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Ich bedanke mich bei der Wikiversity Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen, bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und erstellte Bilder und bei Frau Marianne Gausmann für die Erstellung des Pdf-Files. Bei Dr. Almar Kaid bedanke ich mich für die Erstellung einiger Textabschnitte. Bei Dr. Julio Moyano, Axel Stäbler und Dr. Jan Uliczka bedanke ich mich für einige bereit gestellte Aufgaben und Korrekturen im Skript, sowie ihre Mitwirkung im Verlauf der Veranstaltung. Dies gilt auch für die Tutoren Christian Boberg, Daniel Brinkmann, Sebastian Büscher und Andreas Rechtien.

Holger Brenner

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungen 7
31. Riemann-Integrierbarkeit 7
31.1. Treppenfunktionen 8
31.2. Riemann-integrierbare Funktionen 10
31.3. Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen 13
32. Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 15
32.1. Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 15
32.2. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung 16
32.3. Stammfunktion 17
32.4. Stammfunktionen zu Potenzreihen 20
33. Integrationsregeln 21
33.1. Partielle Integration 21
33.2. Integration der Umkehrfunktion 24
33.3. Die Substitutionsregel 25
34. Integration rationaler Funktionen 28
34.1. Partialbruchzerlegung 32
34.2. Integration rationaler Funktionen 35
35. Integration spezieller Funktionen 36
35.1. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion 36
35.2. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen 38
35.3. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in Wurzelfunktionen 39
36. Uneigentliche Integrale 44
36.1. Integrale von Grenzfunktionen 44
36.2. Uneigentliche Integrale 45
37. Vergleichskriterien 49
37.1. Vergleichskriterien mit Reihen 49
37.2. Die Fakultätsfunktion 51
37.3. Gewöhnliche Differentialgleichungen 53
38. Lineare Differentialgleichungen 56

38.1. Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 56
38.2. Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 58
39. Getrennte Variablen 61
39.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen 61
40. Differenzierbare Kurven 67
40.1. Differenzierbare Kurven 67
41. Rektifizierbare Kurven 72
41.1. Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven 72
41.2. Länge von Kurven 73
42. Richtungsableitung 78
42.1. Richtungsableitung 79
42.2. Polynomiale Funktionen 83
43. Partielle Richtungsableitung 84
43.1. Partielle Ableitungen 84
43.2. Höhere Richtungsableitungen 86
43.3. Der Satz von Schwarz 87
44. Totale Differenzierbarkeit 88
44.1. Totale Differenzierbarkeit 88
44.2. Die Kettenregel 91
45. Totale Differenzierbarkeit II 93
45.1. Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen 93
46. Extrema 97
46.1. Der Gradient 97
46.2. Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen 99
46.3. Eigenschaften von Bilinearformen 101
47. Symmetrische Bilinearformen 104
47.1. Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen 104
47.2. Die Taylor-Formel - Vorbereitungen 105
48. Taylor-Formel 110
48.1. Die Taylor-Formel 110
48.2. Hinreichende Kriterien für lokale Extrema 111
48.3. Vollständige metrische Räume 114
49. Banachscher Fixpunktsatz 115

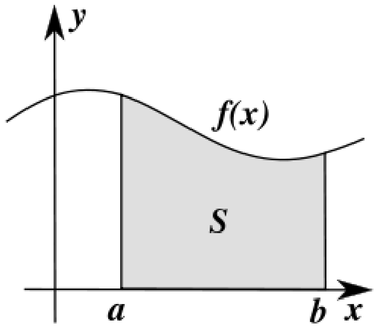
49.1. Der Banachsche Fixpunktsatz 115
49.2. Der Satz über die Umkehrabbildung 115
50. Diffeomorphismen 120
50.1. Diffeomorphismen 120
51. Implizite Abbildungen 124
51.1. Der Satz über implizite Abbildungen 124
52. Vektorfelder 129
52.1. Der Satz über die injektive Abbildung 129
52.2. Vektorfelder 130
52.3. Gewöhnliche Differentialgleichungen 131
52.4. Lipschitz-Bedingungen 133
53. Picard-Lindelöf 134
53.1. Supremumsnorm und Abbildungsräume 134
53.2. Integration von stetigen Wegen 136
53.3. Differential- und Integralgleichungen 137
53.4. Der Satz von Picard-Lindelöf 138
54. Gradientenfelder 140
54.1. Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen 140
54.2. Gradientenfelder 142
54.3. Differentialgleichungen höherer Ordnung 144
55. Trigonalisierbarkeit 146
55.1. Lineare Differentialgleichungssysteme 146
55.2. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 148
55.3. Trigonalisierbare lineare Abbildungen 149
56. Lineare Differentialgleichungssysteme 151
56.1. Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten 151

Arbeitsblätter 158
31. Arbeitsblatt 158
32. Arbeitsblatt 162
33. Arbeitsblatt 166
34. Arbeitsblatt 170

35. Arbeitsblatt 172
36. Arbeitsblatt 174
37. Arbeitsblatt 177
38. Arbeitsblatt 180
39. Arbeitsblatt 182
40. Arbeitsblatt 185
41. Arbeitsblatt 189
42. Arbeitsblatt 191
43. Arbeitsblatt 194
44. Arbeitsblatt 195
45. Arbeitsblatt 198
46. Arbeitsblatt 201
47. Arbeitsblatt 205
48. Arbeitsblatt 208
49. Arbeitsblatt 211
50. Arbeitsblatt 215
51. Arbeitsblatt 217
52. Arbeitsblatt 220
53. Arbeitsblatt 223
54. Arbeitsblatt 227
55. Arbeitsblatt 230
56. Arbeitsblatt 233
Testklausur 1 mit Lösungen 235
Testklausur 2 mit Lösungen 246
3. Bildlizenzen 256
Abbildungsverzeichnis 257

Vorlesungen

31. Riemann-Integrierbarkeit

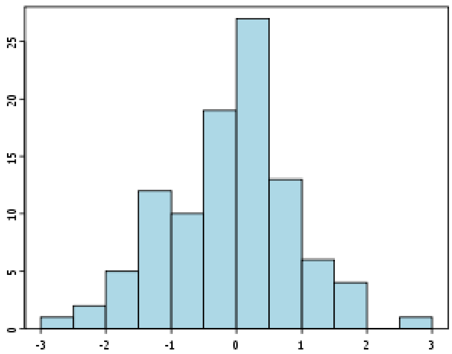


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen*, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, den wir erst im dritten Semester im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandeln werden. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig variieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

31.1. **Treppenfunktionen.**



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 31.1. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Die Intervalle $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 31.2. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i (a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\, dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n} t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bzgl. der eine Treppenfunktion vorliegt.

Definition 31.3. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$ ist für alle $x \in I$. Eine Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ ist für alle $x \in I$.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition 31.4. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Obersumme* (oder ein *oberes Treppenintegral*) von f auf I.

Definition 31.5. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Untersumme* (oder ein *unteres Treppenintegral*) von f auf I.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene Obersummen (Untersummen).

Definition 31.6. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

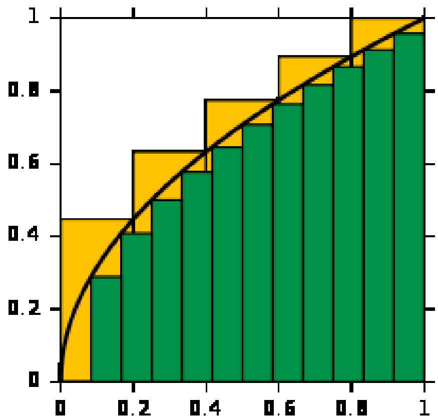
Definition 31.7. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der Untersummen nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der Obersummen ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Maxima (Minima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist. Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

31.2. **Riemann-integrierbare Funktionen.**



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 31.8. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Definition 31.9. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer *Riemann-integrierbaren Funktion*

$$f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\,dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bzgl. welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$$

Lemma 31.10. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 31.8. □

Beispiel 31.11. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a,b] \subseteq [0,1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0,1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$[i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}],\; i = 0, \ldots, n-1\,,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}(i\frac{1}{n})^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= \frac{1}{n^3}(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\end{aligned}$$

(siehe Aufgabe 31.7 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n \to \infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}((i+1)\frac{1}{n})^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\ &= \frac{1}{n^3}(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 31.10 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 31.12. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 31.9. □

In der Sitution des vorstehenden Lemmas gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\, dt\,.$$

Definition 31.13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a, b] \subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des oberen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ die beiden Definitionen überein.

31.3. **Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.**

Satz 31.14. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir können annehmen, dass das Intervall kompakt ist, sagen wir $I = [a, b]$. Die stetige Funktion f ist auf diesem kompakten Intervall beschränkt nach Satz 22.4. Daher gibt es obere und untere Treppenfunktionen und daher existieren Oberintegral und Unterintegral. Wir müssen zeigen, dass sie übereinstimmen.Dazu genügt es, zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ eine untere und eine obere Treppenfunktion für f anzugeben derart, dass die Differenz ihrer Treppenintegrale $\leq \epsilon$ ist.Nach Satz 22.11 ist f gleichmäßig stetig. Daher gibt es zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{b-a}$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, x' \in I$ mit $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), f(x')) \leq \epsilon'$ gilt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} \leq \delta$ ist, und betrachten wir die Unterteilung des Intervalls mit den Punkten $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Auf den Teilintervallen $[a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, ist der Abstand zwischen dem Maximum

$$t_i = \max\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

und dem Minimum

$$s_i = \min\left(f(x), a_{i-1} \leq x \leq a_i\right)$$

kleiner/gleich ϵ'. Die zu diesen Werten gehörigen Treppenfunktionen, also

$$t(x) := \begin{cases} t_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ t_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

und

$$s(x) := \begin{cases} s_i \text{ für } x \in [a_{i-1}, a_i[\text{ und } 1 \leq i \leq n-1\,, \\ s_n \text{ für } x \in [a_{n-1}, a_n]\,, \end{cases}$$

sind dann eine obere bzw. untere Treppenfunktion zu f. Die Differenz zwischen den zugehörigen Ober- und Untersummen ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - s_i) \frac{b-a}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \epsilon' \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{n} = \epsilon.$$

□

Diese Aussage gilt dann auch für stückweise stetige Funktionen.

Wenn man Aussagen beweist, bei denen auf Unterteilungen eines Intervalls Bezug genommen wird, so ist es häufig sinnvoll, *feinere Unterteilungen* einzuführen. Insbesondere ersetzt man häufig zwei verschiedene Unterteilungen durch eine gemeinsame Verfeinerung.

Lemma 31.15. *Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f,g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.*
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.*
(3) *Es ist $\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.*
(4) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.*
(5) *Die Funktionen $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Lemma 31.15. (5). Wir betrachten die Aussage für das Maximum. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\delta > 0$ eine obere und eine untere Treppenfunktion gibt derart, dass die Differenz der beiden Treppenintegrale $\leq \delta$ ist. Sei also ein $\delta > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit gibt es Treppenfunktionen

$$s_1 \text{ und } t_1 \text{ mit } s_1 \leq f \leq t_1 \text{ und mit } \int_a^b (t_1 - s_1)x\,dx \leq \delta/2$$

und

$$s_2 \text{ und } t_2 \text{ mit } s_2 \leq g \leq t_2 \text{ und mit } \int_a^b (t_2 - s_2)x\,dx \leq \delta/2\,.$$

Wir können annehmen, dass diesen Treppenfunktionen die gleiche Unterteilung zugrunde liegt. Es sei ℓ_k, $k = 1, \ldots, n$ die Länge des k-ten Teilintervalls I_k und es sei

$$\delta_k = (t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \ell_k\delta_k &= \sum_{k=1}^n \ell_k((t_1-s_1)|_{I_k} + (t_2-s_2)|_{I_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \ell_k(t_1-s_1)|_{I_k} + \sum_{k=1}^n \ell_k(t_2-s_2)|_{I_k} \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\ &= \delta.\end{aligned}$$

Wir setzen

$$s = \max(s_1, s_2) \text{ und } t = \max(t_1, t_2)\,.$$

Dies ist offenbar eine obere bzw. untere Treppenfunktionen für $\max(f,g)$. Wir betrachten ein Teilintervall I_k dieser Unterteilung. Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_1 \leq t_2$$

gilt, so ist

$$t - s = t_2 - s_2 \leq \delta_k .$$

Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_2 \leq t_1$$

gilt, so ist ebenfalls

$$t - s = t_1 - s_2 \leq t_1 - s_1 \leq \delta_k .$$

Dies gilt auch in den beiden anderen Fällen. Damit ist die Differenz der Treppenintegrale $\leq \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_k \leq \delta$. (6) folgt direkt aus (5). Für (7) siehe Lemma 31.15. ☐

32. Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

32.1. **Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.**

Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\, dt}{b-a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b - a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser Durchschnittswert (oder Mittelwert) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 32.1. *Sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a) .$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbeondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b - a) .$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\, dt = d(b - a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$. ☐

32.2. **Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.**

Es ist geschickt auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\, dt := - \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Definition 32.2. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral.*

Satz 32.3. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \mapsto 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\, dt - hf(x)\right)$$

für $h \mapsto 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\, dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $g(t) = f(t) - f(x)$ betrachten können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|\, f(t)\,| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ die Abschätzung

$$|\int_x^{x+h} f(t)\, dt\,| \leq |\int_x^{x+h} |\, f(t)\,|\ dt\,| \leq |\int_x^{x+h} \epsilon\, dt\,| = |\,h\,|\, \epsilon$$

und daher

$$|\,\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt\,| \leq \epsilon.$$

□

32.3. **Stammfunktion.**

Zur Definition von Stammfunktionen setzen wir wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $= \mathbb{C}$. Wir werden uns aber weitgehend auf den reellen Fall beschränken.

Definition 32.4. Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen und sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf D differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in D$.

Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 31.14 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 32.5. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 31.14 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt\,,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. □

Lemma 32.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

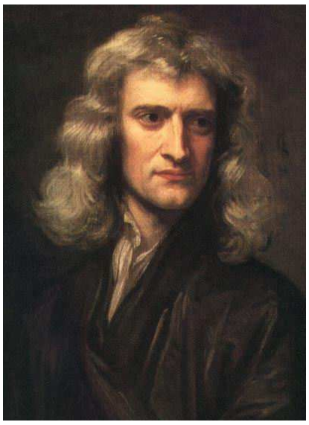
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G = c$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F-G)' \,=\, F' - G' \,=\, f - f \,=\, 0.$$

Daher ist nach Korollar 28.4 die Differenz $F - G$ konstant. □



Isaac Newton (1643-1727)   Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel.*

Korollar 32.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a < b$ aus I die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 31.14 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) \;=\; G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 32.3 ist G differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 32.6 ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) - G(a) \;=\; F(b) - c - F(a) + c \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt = F + c\,,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere in Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt. Das explizite Aufführen einer Integrationskonstanten erübrigt sich, wenn man das Gleichheitszeichen so interpretiert, dass die Gleichheit eben nur bis auf eine Konstante gilt.

Notation 32.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den schon im ersten Semester bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1} x^{a+1}$.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$, es ist ja

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ ist $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, es ist ja

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}\right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}.
\end{aligned}$$

In der übernächsten Vorlesung werden wir eine Verfahren angeben, wie man zu einer beliebigen rationalen Funktion (also einem Quotienten aus zwei Polynomen) eine Stammfunktion finden kann.

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2} d \;=\; -\frac{1}{x}|_{-a}^{a} \;=\; -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \;=\; -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 32.9. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{t^2}{2} \cos \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t \neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t \cos \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t^2}\;.$$

Für $t = 0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{s^2}{2} \cos \frac{1}{s^2}}{s} = \frac{s}{2} \cos \frac{1}{s^2}\;.$$

Für $s \mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 32.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) \;=\; 0 - 0 \;=\; 0.$$

32.4. **Stammfunktionen zu Potenzreihen.**

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann, siehe Vorlesung 29.

Lemma 32.10. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine in $U(0,r)$ konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls in $U(0,r)$ konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für f dar.

Beweis. Sei $x \in U(0,r)$. Nach Voraussetzung und nach Lemma 26.7 ist dann auch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\, a_n x^n \,|$$

konvergent. Für jedes $n \geq x$ gelten die Abschätzungen

$$|\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,| \leq |\, a_{n-1} x^{n-1} \,||\, \frac{x}{n} \,| \leq |\, a_{n-1} x^{n-1} \,| \,.$$

Daher gilt für ein $k \geq x$ die Abschätzung

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |\, a_{n-1} x^{n-1} \,| \,.$$

Die rechte Reihe konvergiert nach Voraussetzung und ist daher eine konvergente Majorante für die linke Reihe. Daher konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} |\, \frac{a_{n-1}}{n} x^n \,|$ und nach Satz 24.8 auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$. Die Stammfunktionseigenschaft folgt aus Satz 29.1. ☐

33. Integrationsregeln

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

33.1. **Partielle Integration.**

Satz 33.1. *Es seien*

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt \,.$$

Beweis. Aufgrund der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $fg' + f'g$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt + \int_a^b f'(t)g(t)\, dt \;=\; \int_a^b (fg' + f'g)(t)\, dt \;=\; fg|_a^b.$$

☐

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form fg' vor, sondern einfach als Produkt uv (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung $1u$ manchmal helfen kann). Dann muss man einen

Faktor integrieren und dn anderen differenzieren. Wenn V eine Stammfunktion von v ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V\,.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das zweite Integral rechts, also $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$, integriert werden kann.

Beispiel 33.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels partieller Integration, wobei wir $\ln x = 1 \cdot \ln x$ schreiben und 1 integrieren und den Logarithmus differenzieren. Damit ist

$$\int_a^b \ln x\,dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b 1\,dx = (x \cdot \ln x)|_a^b - x|_a^b.$$

Die Stammfunktion ist also $x \cdot \ln x - x$.

Beispiel 33.3. Die Stammfunktion der Sinusfunktion $\sin x$ ist $-\cos x$. Um Stammfunktionen zu $\sin^n x$ zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für $n \geq 2$ ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sin^n t\ dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t\ dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t)\,dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t\ dt - \int_0^x (\sin^{n-2} t\ \cos t)\cos t\ dt \\
&= \int_0^x \sin^{n-2} t\ dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t\,|_0^x - \frac{1}{n-1}(\int_0^x \sin^n t\ dt).
\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $n-1$ und Umstellen erhält man

$$n \int_0^x \sin^n t\ dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t\ dt - \sin^{n-1} x\ \cos x\,.$$

Speziell ergibt sich für $n = 2$

$$\int_0^x \sin^2 t\ dt = \frac{1}{2}(x - \sin x\ \cos x)\,.$$

John Wallis (1616-1703)

Korollar 33.4. *Es gilt die Darstellung*

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1} = \lim_{m\to\infty} \prod_{k=1}^{m} \frac{4k^2}{4k^2-1} \, .$$

Beweis. Wir setzen

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \; dt \, .$$

Dies ist eine fallende Folge, für die aufgrund von Beispiel 33.3 die rekursive Beziehung

$$a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$$

und die Anfangsbedingungen $a_0 = \frac{\pi}{2}$ und $a_1 = 1$ gelten. Ausgeschrieben bedeutet dies für gerades n

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

und für ungerades n

$$a_n = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} \, .$$

Mit $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$ schreibt sich dies als

$$a_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

bzw. als

$$a_{2m+1} = \frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3} \, .$$

Da die Folge fallend ist und $\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$ gilt konvergieren die Quotienten $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ gegen 1. Also ist insbesondere

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{m\to\infty} \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3\cdot 1}{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2}{(2m+1)(2m-1)\cdots 5\cdot 3}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+1)(2m-1)^2(2m-3)^2\cdots 5^2\cdot 3^2\cdot 1}{(2m(2m-2)\cdots 4\cdot 2)^2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Hier kann man den Zähler, indem man zwei aufeinander folgende Faktoren ausmultipliziert, als $\prod_{k=1}^m(4k^2-1)$ und den Nenner als $\prod_{k=1}^m 4k^2$ schreiben. Daher ist

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\prod_{k=1}^m 4k^2}{\prod_{k=1}^m(4k^2-1)} = \frac{\pi}{2}\,.$$

□

33.2. **Integration der Umkehrfunktion.**

Satz 33.5. *Es sei $f:[a,b]\to[c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist*

$$G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Beweis. Ableiten unter Verwendung von Lemma 27.7 und Satz 27.8 ergibt

$$\begin{aligned}(yf^{-1}(y)-F(f^{-1}(y))' &= f^{-1}(y)+y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}-f(f^{-1}(y))\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}\\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

□

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn $f:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ eine streng wachsende Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen $[a,b]$ und $[f(a),f(b)]$ induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s)\,ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b)-af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b)-af(a)-\int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Für die Stammfunktion G von f^{-1} mit dem Startpunkt $f(a)$ gilt daher, wenn F die Stammfunktion zu f bezeichnet, die Beziehung

$$\begin{aligned}G(y) &= \int_{f(a)}^{y} f^{-1}(t)\,dt\\ &= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t)\,dt\\ &= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y))-af(a)-\int_a^{f^{-1}(y)} f(s)\,ds\\ &= yf^{-1}(y)-af(a)-F(f^{-1}(y))+F(a)\\ &= yf^{-1}(y)-F(f^{-1}(y))-af(a)+F(a),\end{aligned}$$

wobei $-af(a)+F(a)$ eine Integrationskonstante ist.

Beispiel 33.6. Wir berechnen eine Stammfunktion von $\arctan x$ unter Verwendung von Satz 33.5. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t \, dt = -\ln(\cos x)\,.$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von $\arctan x$.

33.3. **Die Substitutionsregel.**

Satz 33.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g : [a,b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, ds\,.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von g existieren beide Integrale. Es sei F eine Stammfunktion von f, die aufgrund von Korollar 32.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$ die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = (F\circ g)|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\, ds.$$

□

Beispiel 33.8. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind bspw.

$$\int g^n(t)g'(t)$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1} g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln g\,.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

Korollar 33.9. *Es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b],\ s \longmapsto \varphi(s),$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\, ds$$

Beweis. Nach Satz 33.7 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds \ = \ \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi(\varphi^{-1}(b))} f(t)\, dt \ = \ \int_a^b f(t)\, dt.$$

□

Bemerkung 33.10. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

ausgerechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung $\varphi'(t)$ und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion φ^{-1} berechenbar ist). Mit $c = \varphi^{-1}(a)$ und $d = \varphi^{-1}(b)$ liegt insgesamt die Situation

$$[c, d] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

(1) Ersetze $f(t)$ durch $f(\varphi(s))$.
(2) Ersetze dt durch $\varphi'(s)ds$.
(3) Ersetze die Integrationsgrenzen a und b durch $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt \ = \ d\varphi(s) \ = \ \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der Differentialformen auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

Beispiel 33.11. Die obere Kreislinie des *Einheitskreises* ist die Punktmenge

$$\{(x,y)|\, x^2+y^2=1,\ -1\le x\le 1,\ y\ge 0\}\,.$$

Zu gegebenem x, $-1\le x\le 1$, gibt es genau ein y, das diese Bedingung erfüllt, nämlich $y=\sqrt{1-x^2}$. Daher ist der Flächeninhalt des oberen Einheitskreises gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1,1]$, also gleich

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution

$$x=\cos t\ \text{ und } t=\arccos x$$

(wobei $\cos\,:[0,\pi]\to[-1,1]$ bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned}\int_a^b\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{\arccos a}^{\arccos b}\sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t\,)\,dt\\ &= -\int_{\arccos a}^{\arccos b}\sin^2 t\,dt\\ &= \frac{1}{2}(\sin t\,\cos t-t)|_{\arccos a}^{\arccos b}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\frac{1}{2}(x\cdot\sin(\arccos x\,)-\arccos x\,)=\frac{1}{2}(x\cdot\sqrt{1-x^2}-\arccos x\,)$$

eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\ =\ \frac{1}{2}(\sin 0+\sin\pi+\pi)\ =\ \pi/2.$$

Beispiel 33.12. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2-1}$ unter Verwendung der Hyperbelfunktionen $\sinh t$ und $\cosh t$, für die die Beziehung $\cosh^2 t-\sinh^2 t=1$ gilt. Die Substitution

$$x=\cosh t\ \text{ mit } dx=\sinh t\,dt$$

liefert

$$\int_a^b\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b}\sqrt{\cosh^2 t-1}\cdot\sinh t\,dt=\int_{\operatorname{arccosh} a}^{\operatorname{arccosh} b}\sinh^2 t\,dt.$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2 t\ =\ (\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^2\ =\ \frac{1}{4}(e^{2t}+e^{-2t}-2).$$

Daher ist

$$\int\sinh^2 t\,dt\ =\ \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2u}-\frac{1}{2}e^{-2u}-2u)\ =\ \frac{1}{4}\sinh 2u-\frac{1}{2}u$$

und somit

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx = \frac{1}{4} \sinh(2 \operatorname{arccosh} x) - \frac{1}{2} \operatorname{arccosh} x .$$

Beispiel 33.13. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x \cos x - \sin x)^2}$$

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$(x \cos x - \sin x)^{-1} .$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{(x \cos x - \sin x)^2} = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2} .$$

Wir schreiben daher f als ein Produkt

$$f(x) = \frac{x \sin x}{(x \cos x - \sin x)^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\int f(x)\, dx &= (x \cos x - \sin x)^{-1} \cdot \frac{x}{\sin x} \\
&\quad - \int (x \cos x - \sin x)^{-1} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}\, dx \\
&= (x \cos x - \sin x)^{-1}\left(-\frac{x}{\sin x}\right) + \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx \\
&= (x \cos x - \sin x)^{-1}\left(-\frac{x}{\sin x}\right) - \cot x .
\end{aligned}$$

34. Integration rationaler Funktionen

Wir erinnern an den Begriff einer rationalen Funktion.

Definition 34.1. Zu zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{K},\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion*.

Wir möchten zeigen, wie man zu solchen rationalen Funktionen eine Stammfunktion finden kann. In vielen Fällen wissen wir das bereits. Wenn $Q = 1$ ist, so handelt es sich um ein Polynom P, das problemlos zu integrieren ist.

Für die Funktion $1/x$ ist der natürliche Logarithmus eine Stammfunktion.[1] Damit ist auch eine Funktion vom Typ

$$\frac{1}{ax+b}$$

(mit $a \neq 0$) integrierbar, eine Stammfunktion ist $\frac{1}{a}\ln(ax+b)$. Damit kann man überhaupt beliebige rationale Funktionen der Form

$$\frac{P(x)}{ax+b}$$

integrieren. Die Division mit Rest[2] führt zu einer Darstellung

$$P = H(ax+b) + c\,,$$

mit einem weiteren Polynom H und wobei das Restpolynom c konstant ist, da sein Grad kleiner als der Grad des linearen Polynoms ist, durch das die Division durchgeführt wird. Aus dieser Gleichung erhält man die Darstellung

$$\frac{P(x)}{ax+b} = H + \frac{c}{ax+b}\,,$$

wobei wir für die beiden Summanden Stammfunktionen angeben können. Die Division mit Rest wird auch im allgemeinen Fall entscheidend sein. Davor betrachten wir aber noch den Fall eines quadratischen Nennerpolynoms mit Zähler 1, also

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Durch Multiplikation mit a kann man den Koeffizienten vor x^2 zu 1 normieren. Durch quadratisches Ergänzen kann man

$$x^2 + bx + c = (x+d)^2 + e$$

schreiben. Mit der neuen Variablen $u = x + d$ (bzw. mit der Substitution $u = x + d$) schreibt sich dies als $u^2 + e$. Mit einer weiteren Substitution unter Verwendung der Quadratwurzel von e bzw. von $-e$ gelangt man zu

$$\frac{1}{1+v^2} \text{ oder } \frac{1}{1-v^2}\,.$$

Im ersten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1+v^2}dv = \arctan v$$

[1] Die Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs, um die Aussagen über Stammfunktionen auch in dieser Hinsicht präzise zu machen, überlassen wir dem Leser.

[2] Man kann die Division mit Rest durch ein lineares Polynom $ax+b$ sukzessive fortsetzen und erhält ein Polynom in der „neuen Variablen" $u = ax + b$. Dies geht nicht mit einem Polynom von höherem Grad.

und im zweiten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1-v^2}dv = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\,,$$

wie in der 32. Vorlesung gezeigt wurde. Für die inversen Funktionen zu Potenzen von quadratischen nullstellenfreien Polynomen werden die Stammfunktionen durch folgende Rekursionsformel bestimmt.

Lemma 34.2. *Es sei x^2+bx+c (mit $b,c \in \mathbb{R}$) ein quadratisches Polynom ohne reelle Nullstelle (d.h. dass $\triangle = \frac{b^2-4c}{4} < 0$ ist).*

Dann ist[3]

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\arctan\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}(u+\frac{b}{2})$$

und für $n \geq 1$ gilt die Rekursionsformel

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n+1}}dx = \frac{1}{n(4c-b^2)}\left(\frac{2u+b}{(u^2+bu+c)^n} + (4n-2)\int\frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx\right)$$

Beweis. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}(u+\frac{b}{2}))' &= \frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{-\triangle}(x+\frac{b}{2})^2}\\
&= \frac{1}{-\triangle+(x+\frac{b}{2})^2}\\
&= \frac{1}{c-\frac{b^2}{4}+x^2+bx+\frac{b^2}{4}}\\
&= \frac{1}{x^2+bx+c}.
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Rekursionsformel setzen wir $q(x) = x^2+bx+c$ und leiten ab.

$$\begin{aligned}
((2x+b)q^{-n})' &= 2q^{-n} - n(2x+b)q^{-n-1}(2x+b)\\
&= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(2x+b)^2
\end{aligned}$$

3

Manchmal wird eine Stammfunktion zu einer Funktion mit einer neuen Variablen angegeben, um die Rollen von Integrationsvariablen und Variable für die Integrationsgrenzen auseinander zu halten. In einem unbestimmten Integral, wo keine Integrationsgrenzen aufgeführt werden, ist das nicht wichtig. Bei einem Integral der Form $\int_0^u f(x)dx$ ist x die Integrationsvariable und u die Grenzvariable. Der Ausdruck hängt aber nicht von x ab, sondern lediglich von u. Deshalb ist $\int_0^u f(x)dx = F(u)$ (auf beiden Seiten steht eine von u abhängige Funktion, und diese stimmen überein) richtig und $\int_0^u f(x)dx = F(x)$ falsch. Eine Formulierung wie $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ ist aber korrekt. .

$$
\begin{aligned}
&= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4x^2 + 4xb + b^2) \\
&= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4q - 4c + b^2) \\
&= 2q^{-n} - 4nq^{-n} + n(4c - b^2)q^{-n-1} \\
&= (2 - 4n)q^{-n} + n(4c - b^2)q^{-n-1}.
\end{aligned}
$$

Division durch $n(4c - b^2)$ und Umstellen ergibt

$$q^{-n-1} = \frac{1}{n(4c - b^2)}((2x + b)q^{-n})' + \frac{4n - 2}{n(4c - b^2)}q^{-n}.$$

Dies ist die Behauptung. □

Bemerkung 34.3. Mit Lemma 34.2 kann man auch rationale Funktionen der Form

$$\frac{rx + s}{(x^2 + bx + c)^n}$$

(mit $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$,) integrieren, wo also das Zählerpolynom linear ist und das Nennerpolynom eine Potenz eines quadratischen Polynoms ist. Bei $n = 1$ ist

$$(\frac{r}{2} \ln (x^2 + bx + c))' = \frac{r}{2} \cdot \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} = \frac{rx + \frac{rb}{2}}{x^2 + bx + c}.$$

D.h. dass die Differenz zwischen dieser Ableitung und der zu integrierenden Funktion vom Typ

$$\frac{u}{x^2 + bx + c}$$

ist, was wir aufgrund von Lemma 34.2 integrieren können. Bei $n \geq 2$ ist

$$
\begin{aligned}
&(\frac{-r}{2(n-1)} \cdot \frac{1}{(x^2 + bx + c)^{n-1}})' \\
= \;& \frac{-r}{2(n-1)} \cdot (-n + 1) \cdot (2x + b) \cdot \frac{1}{(x^2 + bx + c)^n} \\
= \;& \frac{rx + \frac{rb}{2}}{(x^2 + bx + c)^n}
\end{aligned}
$$

und wieder ist das Integral auf eine schon behandelte Situation zurückgeführt.

Wir möchten für beliebige rationale Funktionen $f = \frac{P}{Q}$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Stammfunktionen bestimmen. Dies geht grundsätzlich immer, vorausgesetzt, dass man eine Faktorzerlegung des Nennerpolynoms besitzt. Aufgrund der reellen Version des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es eine Faktorzerlegung

$$Q = (X - b_1) \cdots (X - b_r) \cdot q_1 \cdots q_s\,,$$

wobei die q_j quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen sind. Das Bestimmen der Stammfunktionen zu rationalen Funktionen beruht auf der *Partialbruchzerlegung* von rationalen Funktionen, die wir zuerst besprechen.

34.1. **Partialbruchzerlegung.**

Die *Partialbruchzerlegung* liefert eine wichtige Darstellungsform für eine rationale Funktion P/Q, bei der die Nenner besonders einfach werden. Wir beginnen mit dem Fall $K = \mathbb{C}$, wo wir den Fundamentalsatz der Algebra zur Verfügung haben.

Satz 34.4. *Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{C}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, mit

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \\ \ldots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \ldots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}}$$

.

Beweis. Die Division mit Rest liefert eine eindeutige Darstellung

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{\tilde{P}}{Q}$$

mit $\operatorname{grad}(\tilde{P}) < \operatorname{grad}(Q)$. Wir müssen daher die Aussage nur für Quotienten aus Polynomen zeigen, wo der Grad des Zählerpolynoms kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist.Wir führen Induktion über den Grad $r = \sum_{i=1}^{s} r_i$ des Nennerpolynoms. Bei $r = 0, 1$ ist nichts zu zeigen, bzw. der Quotient steht bereits in der gewünschten Form. Es sei nun Q ein Nennerpolynom vom Grad r und die Aussage sei für kleineren Grad bereits bewiesen. Es sei $X - a_1$ ein Linearfaktor von Q, so dass wir

$$Q = \tilde{Q}(X - a_1)$$

schreiben können, wobei $\tilde{Q}$ den Grad $r - 1$ besitzt. Die Ordnung von $X - a_1$ in Q sei r_1. Wir setzen

$$\frac{P}{Q} = \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$$

an. Dies führt auf

$$P = c_{1r_1}(X - a_2)^{r_2} \cdots (X - a_s)^{r_s} + \tilde{P}(X - a_1)\,,$$

aus der wir c_{1r_1} und $\tilde{P}$ bestimmen wollen. Da die Gleichheit insbesondere für $X = a_1$ gelten soll, muss

$$c_{1r_1} = \frac{P(a_1)}{(a_1 - a_2)^{r_2} \cdots (a_1 - a_s)^{r_s}}$$

sein, wobei diese Division erlaubt ist, da die a_i alle als verschieden vorausgesetzt wurden. Wir betrachten nun

$$P - c_{1r_1}(X-a_2)^{r_2} \cdots (X-a_s)^{r_s}$$

mit dem soeben bestimmten Wert c_{1r_1}. Für diese Differenz ist dann a_1 nach Konstruktion eine Nullstelle, so dass man nach Lemma 17.4 durch $X - a_1$ teilen kann, also

$$P - c_{1r_1}(X-a_2)^{r_2} \cdots (X-a_s)^{r_s} = (X-a_1)\tilde{P}$$

erhält. Dadurch ist $\tilde{P}$ eindeutig festgelegt. Der Grad von $\tilde{P}$ ist kleiner als der Grad von P und der Grad von $\tilde{P}$ ist kleiner als der Grad von $\tilde{Q}$. Daher können wir auf $\frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}}$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. $\square$

Wir wenden uns nun der reellen Situation zu.

Korollar 34.5. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X-a_1)^{r_1} \cdots (X-a_s)^{r_s} Q_1^{t_1} \cdots Q_u^{t_u}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{R}$ und verschiedenen quadratischen Polynomen Q_k ohne reelle Nullstellen. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{R}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, und eindeutig bestimmte lineare Polynome $L_{k\ell} = d_{k\ell}X + e_{k\ell}$, $1 \leq k \leq u$, $1 \leq \ell \leq t_k$, mit

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \;=\;& H + \frac{c_{11}}{X-a_1} + \frac{c_{12}}{(X-a_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r_1}}{(X-a_1)^{r_1}} \\ & + \ldots + \frac{c_{s1}}{X-a_s} + \frac{c_{s2}}{(X-a_s)^2} + \ldots + \frac{c_{sr_s}}{(X-a_s)^{r_s}} \\ & + \frac{L_{11}}{Q_1} + \frac{L_{12}}{Q_1^2} + \ldots + \frac{L_{1t_1}}{Q_1^{t_1}} \\ & + \ldots + \frac{L_{u1}}{Q_u} + \frac{L_{u2}}{Q_u^2} + \ldots + \frac{L_{ut_u}}{Q_u^{t_u}}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir gehen von der komplexen Partialbruchzerlegung von P/Q aus. Die reell quadratischen Polynome Q_k zerfallen komplex als

$$Q_k = (X-z)(X-\overline{z})$$

mit $z = z_k \in \mathbb{C}$. In der komplexen Partialbruchzerlegung betrachten wir die Teilsumme

$$\frac{c}{(X-z)^\ell} + \frac{d}{(X-\overline{z})^\ell}$$

mit $c, d \in \mathbb{C}$. Wenn man auf die gesamte komplexe Partialbruchzerlegung die komplexe Konjugation anwendet, so bleibt der reelle Quotient $\frac{P}{Q}$ unverändert, ao dass auch die Partialbruchzerlegung in sich überführt wird. Daher müssen c und d zueinander konjugiert sein und die obige Teilsumme ist daher

$$\frac{c}{(X-z)^\ell} + \frac{\overline{c}}{(X-\overline{z})^\ell} = \frac{c(X-\overline{z})^\ell + \overline{c}(X-z)^\ell}{(X-z)^\ell (X-\overline{z})^\ell} = \frac{S}{Q_k^\ell},$$

wobei das Zählerpolynom S reell ist, da es invariant unter der komplexen Konjugation ist. Dieses Zählerpolynom ist im Allgemeinen nicht linear, wir werden aber zeigen, dass man weiter auf lineare Zählerpolynome reduzieren kann.Der Grad von S ist kleiner als der Grad des Nennerpolynoms. Durch sukzessive Division mit Rest von S durch Q_k erhält man

$$S = L_0 + L_1 Q_k + L_2 Q_k^2 + \ldots + L_{\ell-1} Q_k^{\ell-1}$$

mit linearen (reellen) Polynomen L_i. Daher ist

$$\frac{S}{Q_k^\ell} = \frac{L_0 + L_1 Q_k + L_2 Q_k^2 + \ldots + L_{\ell-1} Q_k^{\ell-1}}{Q_k^\ell} = \frac{L_0}{Q_k^\ell} + \frac{L_1}{Q_k^{\ell-1}} + \ldots + \frac{L_{\ell-2}}{Q_k^2} + \frac{L_{\ell-1}}{Q_k}.$$

Wenn man alles aufsummiert, so erhält man insgesamt die Behauptung. □

Neben dem Umweg über die komplexe Partialbruchzerlegung gibt es weitere Methoden, in Beispielen die reelle Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Grundsätzlich bedeutet das Bestimmen der (reellen oder komplexen) Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung, ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem zu lösen, wobei man sowohl durch Koeffizientenvergleich als auch durch das Einsetzen von bestimmten Zahlen zu hinreichend vielen linearen Gleichungen kommt.

Beispiel 34.6. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{(X-1)(X^2 + X + 1)},$$

wobei der Faktor rechts reell nicht weiter zerlegbar ist. Daher muss es eine eindeutige Darstellung

$$\frac{1}{(X^3 - 1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX + c}{X^2 + X + 1}$$

geben. Multiplikation mit dem Nenner führt auf

$$\begin{aligned} 1 &= a(X^2 + X + 1) + (bX + c)(X - 1) \\ &= (a+b)X^2 + (a + c - b)X + a - c. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a + b = 0 \text{ und } a + c - b = 0 \text{ und } a - c = 1$$

mit den eindeutigen Lösungen

$$a = \frac{1}{3},\ b = -\frac{1}{3},\ c = -\frac{2}{3}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{1}{(X^3 - 1)} = \frac{\frac{1}{3}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{2}{3}}{X^2 + X + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{X-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{X+2}{X^2 + X + 1}.$$

Beispiel 34.7. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{X^3 - X + 5}{X^4 + X^2} = \frac{X^3 - X + 5}{X^2(X^2 + 1)},$$

wo die Faktorzerlegung des Nennerpolynoms sofort ersichtlich ist. Der Ansatz

$$\frac{X^3 - X + 5}{X^2(X^2 + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + 1}$$

führt durch Multiplikation mit dem Nenner auf

$$\begin{aligned} X^3 - X + 5 &= aX(X^2 + 1) + b(X^2 + 1) + (cX + d)X^2 \\ &= aX^3 + aX + bX^2 + b + cX^3 + dX^2 \\ &= (a + c)X^3 + (b + d)X^2 + aX + b. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich durch *Koeffizientenvergleich*

$$b = 5,\ a = -1,\ d = -5,\ c = 2$$

und insgesamt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{X^3 - X + 5}{X^2(X^2 + 1)} = -\frac{1}{X} + \frac{5}{X^2} + \frac{2X - 5}{X^2 + 1}.$$

34.2. **Integration rationaler Funktionen.**

Verfahren 34.8. Es sei eine rationale Funktion

$$f = \frac{P}{Q}$$

gegeben, für die eine Stammfunktion gefunden werden soll. Dabei seien P und Q reelle Polynome. Man geht folgendermaßen vor.

(1) Bestimme die reelle Faktorzerlegung des Nennerpolynoms Q.
(2) Finde die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P}{Q} = H + \sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=1}^{s_i} \frac{c_{ij}}{(X - a_i)^j}) + \sum_{k=1}^{u} (\sum_{j=1}^{t_k} \frac{d_{k\ell}X + e_{k\ell}}{Q_k^\ell}).$$

(3) Bestimme für jedes

$$\frac{c_{ij}}{(X - a_i)^j}$$

und für jedes

$$\frac{d_{k\ell}X + e_{k\ell}}{Q_k^\ell}$$

eine Stammfunktion.

Beispiel 34.9. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$$

bestimmen. Nach Beispiel 34.6 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+4}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{x^2+x+1}\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$\frac{1}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\cdot\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}),$$

wobei wir für den rechten Summanden Lemma 34.2 verwendet haben.

Beispiel 34.10. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x)=\frac{x^3-x+5}{x^4+x^2}$$

bestimmen. Nach Beispiel 34.7 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3-x+5}{x^2(x^2+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2x-5}{x^2+1}.$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$-\ln x-5x^{-1}+\ln(x^2+1)-5\arctan x.$$

35. Integration spezieller Funktionen

35.1. Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion.

Nachdem wir nun rationale Funktionen integrieren können, können wir auch für eine ganze Reihe von Funktionen eine Stammfunktion finden, die wir durch gewisse Standardsubstitution auf eine rationale Funktion zurückführen können.

Lemma 35.1. *Es sei f eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion, d.h. es gebe Polynome $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, $Q\neq 0$, derart, dass*

$$f(t)=\frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$t=\ln s$$

das Integral $\int f(t)\,dt$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen.

Beweis. Bei der Substitution $t = \ln s$ ist

$$dt = \frac{1}{s} ds \, ,$$

und für die Polynome $P(e^t)$ und $Q(e^t)$ ergeben sich

$$P(e^t) = P(e^{\ln s}) = P(s) \text{ und } Q(e^t) = Q(e^{\ln s}) = Q(s) \, .$$

Insgesamt ergibt sich also die rationale Funktion $\frac{P(s)}{sQ(s)}$. In deren Stammfunktion muss man dann $s = e^t$ einsetzen. □

Im vorstehenden Lemma geht es um die zusammengesetzten Funktionen vom Typ

$$U \xrightarrow{\exp} \mathbb{R} \xrightarrow{\frac{P}{Q}} \mathbb{R} \, ,$$

wobei der Definitionsbereich $U \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$U = \{ z \in \mathbb{R} | \, Q(e^z) \neq 0 \}$$

festgelegt ist.

Beispiel 35.2. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{e^t + e^{3t}}$$

finden. Das in Lemma 35.1 beschriebene Verfahren führt auf die rationale Funktion

$$\frac{1}{(s+s^3)s} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

so dass die Partialbruchzerlegung direkt vorliegt. Die Stammfunktion von dieser rationalen Funktion ist

$$-\frac{1}{s} - \arctan s \, .$$

Die Stammfunktion von f ist daher

$$-\frac{1}{e^t} - \arctan e^t \, .$$

Neben dem Polynomring $K[X]$ in einer Variablen über einem Körper K gibt es auch Polynomringe in mehreren Variablen, wobei wir im Folgenden nur den Polynomring in zwei Variablen benötigen. Man schreibt ihn als $K[X,Y]$ und definiert ihn am einfachsten als

$$(K[X])[Y] \, ,$$

wobei der Grundring kein Körper ist. Jedenfalls besteht dieser Ring aus allen Polynomen in zwei Variablen, also aus Ausdrücken der Form

$$a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + a_{30}X^3 + a_{21}X^2Y + a_{12}XY^2 + \ldots \, .$$

Entsprechend gibt es auch rationale Funktionen in zwei Variablen. Diese sind wiederum Quotienten aus zwei Polynomen in zwei Variablen. Wenn man in eine solche Funktion in zwei Variablen zwei Funktionen in einer Variablen einsetzt, so erhält man wieder eine Funktion in einer Variablen. Dies ist der Fall in den folgenden Situationen.

Korollar 35.3. *Es sei eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen* sinh *und* cosh *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome P und Q in zwei Variablen mit $Q \neq 0$ derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sinh t, \cosh t)}{Q(\sinh t, \cosh t)}$$

gilt. Dann lässt sich das Integral

$$\int f(t)\, dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion in der Exponentialfunktion zurückführen und damit lösen.

Beweis. Mit

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \text{ und } \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

erhält man eine rationale Funktion in e^t und $e^{-t} = (e^t)^{-1}$, so dass insgesamt eine rationale Funktion in der Eponentialfunktion vorliegt. Deren Stammfunktion lässt sich wie in Lemma 35.1 beschrieben finden. □

35.2. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen.**

Lemma 35.4. *Es sei eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen* $\sin t$ *und* $\cos t$ *gegeben, d.h. es gebe zwei Polynome P und Q in zwei Variablen mit $Q \neq 0$ derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(\sin t, \cos t)}{Q(\sin t, \cos t)}$$

gilt. Dann führt die Substitution

$$t = 2 \arctan s$$

das Integral

$$\int f(t)\, dt$$

auf das Integral einer rationalen Funktion zurück.

Beweis. Bei der Substitution $t = 2 \arctan s$ ist $s = \tan \frac{t}{2}$ und

$$dt = \frac{2}{1+s^2} ds\,.$$

Aus den trigonometrischen Funktionen wird unter Verwendung von Satz 25.11

$$\sin t = \sin\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= 2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}\\
&= 2s\frac{1}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\cos t &= \cos\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)\\
&= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\\
&= 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-1\\
&= 2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}-1\\
&= 2\frac{1}{1+s^2}-1\\
&= \frac{1-s^2}{1+s^2}.
\end{aligned}$$

Da sowohl das Differential dt als auch die trigonometrischen Funktionen bei dieser Substitution rationale Ausdrücke in s sind, liegt nach dieser Substitution insgesamt eine rationale Funktion vor. $\square$

Beispiel 35.5. Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin t}$$

berechnet sich unter Verwendung von Lemma 35.4 folgendermaßen.

$$\int\frac{1}{\sin t}\,dt = \int\frac{1+s^2}{2s}\cdot\frac{2}{1+s^2}\,ds = \int\frac{1}{s}\,ds.$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{\sin t}$ ist daher $\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$.

35.3. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in Wurzelfunktionen.**

Lemma 35.6. *Es sei f eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}$ (mit $a,b,r,s\in\mathbb{R}$, $a, rx+s\neq 0$, $n\in\mathbb{N}_+$), d.h. es gebe zwei Polynome in zwei Variablen, $P,Q\in\mathbb{R}[x,y]$, $Q\neq 0$, derart, dass*

$$f(x)=\frac{P\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}\right)}{Q\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}}\right)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$x = \frac{su^n - b}{a - ru^n}$$

die Berechnung von $\int f(x)dx$ *auf das Integral einer rationalen Funktion in* u *zurückführen.*

Beweis. Wir können $sa - rb \neq 0$ annehmen, da sonst Zähler und Nenner im Wurzelausdruck linear abhängig sind und man teilen könnte. Bei der angegebenen Substitution ist

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{ax+b}{rx+s}} &= \sqrt[n]{\frac{a\frac{su^n-b}{a-ru^n}+b}{r\frac{su^n-b}{a-ru^n}+s}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{a(su^n-b)+b(a-ru^n)}{r(su^n-b)+s(a-ru^n)}} \\ &= \sqrt[n]{\frac{asu^n-bru^n}{-rb+sa}} \\ &= u. \end{aligned}$$

Da die Ableitung der rationalen Funktion $x = \frac{su^n-b}{a-ru^n}$ nach u wieder eine rationale Funktion in u ist, ist das Gesamtergebnis nach dieser Substitution eine rationale Funktion in u. □

Lemma 35.7. *Es sei* f *eine rationale Funktion in* x *und in* $\sqrt{ax^2+bx+c}$ *(mit* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ *und so, dass* ax^2+bx+c *auch positive Werte annimmt), schreiben kann, d.h. es gebe zwei Polynome in zwei Variablen,* $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, *derart, dass*

$$f(x) = \frac{P(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}{Q(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}$$

gilt. Dann kann man durch eine Substitution der Form

$$x = \alpha t + \beta$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$*), die Berechnung von* $\int f(x)dx$ *auf ein Integral der Form*

(1) $\int R(t, \sqrt{1-t^2})dt$,
(2) $\int R(t, \sqrt{t^2-1})dt$,
(3) $\int R(t, \sqrt{t^2+1})dt$,

zurückführen, wobei R *wieder eine rationale Funktion in zwei Variablen ist. In diesen drei Fällen führen die Substitutionen*

(1) $t = \sin s$,
(2) $t = \cosh s$,
(3) $t = \sinh s$,

auf das Integral über eine rationale Funktion in trigonometrischen Funktionen bzw. in Hyperbelfunktionen

Beweis. Durch eine Substitution der Form $u = \sqrt{a}x$ bzw. $u = \sqrt{-a}x$ vereinfacht sich die Quadratwurzel zu $\sqrt{u^2 + \tilde{b}u + \tilde{c}}$ bzw. zu $\sqrt{-u^2 + \tilde{b}u + \tilde{c}}$. Quadratisches Ergänzen führt zu $\sqrt{v^2 + \tilde{e}}$ bzw. $\sqrt{-v^2 + \tilde{e}}$. Durch eine weitere Substitution der Form $w = \frac{v}{\sqrt{\tilde{e}}}$ erhält man $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{w^2 + 1}$ oder $\sqrt{-\tilde{e}}\sqrt{w^2 - 1}$ oder aber[4] $\sqrt{\tilde{e}}\sqrt{-w^2 + 1}$. Dies sind alles affin-lineare Substitutionen. Die Ergebnisse unter der Gesamtsubstitution sind von der angegebenen Art.

Wenn es sich um ein Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t, \sqrt{1 - t^2})$$

handelt, so führt $t = \sin s$ zu

$$\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{1 - \sin^2 s} = \sqrt{\cos^2 s} = \cos s$$

und zu

$$dt = (\sin s)' ds = \cos s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen $\sin s$ und $\cos s$ ergibt.

Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t, \sqrt{t^2 - 1})$$

führt $t = \cosh s$ zu

$$\sqrt{t^2 - 1} = \sinh s$$

und zu

$$dt = (\cosh s)' ds = \sinh s \, ds,$$

so dass sich eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt.

Bei einem Integral zu einer rationalen Funktion der Form

$$R(t, \sqrt{t^2 + 1})$$

führt $t = \sinh s$ zu

$$\sqrt{t^2 + 1} = \cosh s$$

und zu

$$dt = (\sinh s)' ds = \cosh s \, ds,$$

so dass sich wieder eine rationale Funktion in den Hyperbelfunktionen $\sinh s$ und $\cosh s$ ergibt. □

[4]Der Fall $\sqrt{-w^2 - 1}$ ist nicht möglich, da dann die ursprüngliche Funktion für keine reelle Zahl definiert wäre.

Beispiel 35.8. Wir wollen für die Funktion

$$\frac{1}{s^2\sqrt{1-s^2}^3}$$

eine Stammfunktion bestimmen. Mit der in Lemma 35.7 beschriebenen Substitution

$$s = \sin t \text{ und } ds = \cos t \, dt$$

werden wir auf die Funktion

$$\frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^3 t} \cdot \cos t = \frac{1}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t}$$

geführt. Mit der in Lemma 35.4 beschriebenen Substitution

$$t = 2 \arctan u,\, dt = \frac{2}{1+u^2} du,\, \sin t = \frac{2u}{1+u^2} \text{ und } \cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

werden wir auf die rationale Funktion

$$\frac{(1+u^2)^2}{4u^2} \cdot \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} \cdot \frac{2}{1+u^2} = \frac{(1+u^2)^3}{2u^2(1-u)^2(1+u)^2} = \frac{u^6+3u^4+3u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

geführt. Hierfür müssen wir die Partialbruchzerlegung finden. Die Division mit Rest ergibt

$$u^6+3u^4+3u^2+1 = (2u^6-4u^4+2u^2) \cdot \frac{1}{2} + 5u^4+2u^2+1\,,$$

so dass es also um die rationale Funktion

$$\frac{1}{2} + \frac{5u^4+2u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

geht. Diese Funktion ist eine rationale Funktion in $v = u^2$, so dass wir die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v^3-2v^2+v} = \frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v(v-1)^2}$$

bestimmen. Der Ansatz

$$\frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v(v-1)^2} = \frac{a}{v} + \frac{b}{v-1} + \frac{c}{(v-1)^2}$$

führt zu

$$\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2} = a(v-1)^2 + bv(v-1) + cv\,.$$

Einsetzen von $v = 0$, $v = 1$ und $v = 2$ führt zu

$$\frac{1}{2} = a\,,$$

$$4 = c\,,$$

und

$$\frac{25}{2} = a+2b+2c = \frac{1}{2}+2b+8, \text{ also } b = 2\,.$$

Daher ist

$$\frac{\frac{5}{2}v^2+v+\frac{1}{2}}{v(v-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{v}+\frac{2}{v-1}+\frac{4}{(v-1)^2}$$

bzw.

$$\frac{\frac{5}{2}u^4+u^2+\frac{1}{2}}{u^2(u^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{u^2}+\frac{2}{u^2-1}+\frac{4}{(u^2-1)^2}\,.$$

Mit den Identitäten

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{4}{(u^2-1)^2} &= (\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})^2\\ &= \frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{2}{(u-1)(u+1)}\\ &= \frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{u+1}\end{aligned}$$

ergibt sich schließlich

$$\frac{\frac{5}{2}u^4+u^2+\frac{1}{2}}{u^2(u^2-1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{u^2}+\frac{1}{(u-1)^2}+\frac{1}{(u+1)^2}\,.$$

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{2}+\frac{5u^4+2u^2+1}{2u^6-4u^4+2u^2}$$

ist daher

$$\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\,.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}\tan(\frac{t}{2})-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})}-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})-1}-\frac{1}{\tan(\frac{t}{2})+1}$$

eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}\,,$$

und

$$\frac{1}{2}\tan(\frac{\arcsin s}{2})-\frac{1}{2}\frac{1}{\tan(\frac{\arcsin s}{2})}-\frac{1}{\tan(\frac{\arcsin s}{2})-1}-\frac{1}{\tan(\frac{\arcsin s}{2})+1}$$

ist eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{s^2\sqrt{1-s^2}^3}\,.$$

36. Uneigentliche Integrale

In dieser Vorlesung entwickeln wir die Integrationstheorie in zweierlei Hinsicht weiter. Einerseits untersuchen wir, wie sich bei einer konvergenten Funktionenfolge die Integrale verhalten. Andererseits beschäftigen wir uns mit der Frage, was passiert, wenn wir in einem Integral $\int_a^b f(t)dt$ die Intervallgrenzen gegen unendlich oder gegen eine Zahl, wo die Funktion nicht definiert ist, wandern lassen.

36.1. **Integrale von Grenzfunktionen.**

Lemma 36.1. *Es sei*

$$f_n : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt\, .$$

Beweis. Da die Grenzfunktion nach Lemma 26.4 stetig ist, existiert das bestimmte Integral rechts nach Satz 31.14. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$| f_n(t) - f(t) | \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in [a, b]$. Daher gilt für diese n die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, dt \right| &\leq \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^b | f_n(t) - f(t) |\ dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\, dt \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 36.2. *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $[a, b]$ ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f : M \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^b f(x, t)\, dt,$$

stetig.

Beweis. Aufgrund von Satz 20.3 müssen wir für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit dem Grenzwert x zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n,t)\,dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x,t)\,dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 36.1 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge $f(x_n,-)$ gleichmäßig gegen $f(x,-)$ konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ und ein $t_m \in [a,b]$ gibt mit $\mid f(x_m,t_m) - f(x,t_m) \mid \geq \epsilon$. So können wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit zugehörigen Punkten t_{n_k} konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Satz 22.3 gibt es zu dieser Folge in $[a,b]$ eine konvergente Teilfolge, und durch Umbennen können wir annehmen, dass die Folge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, sagen wir gegen $t \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ die Abschätzungen $\mid f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t) \mid \leq \frac{1}{3}\epsilon$ und $\mid f(x,t_{n_k}) - f(x,t) \mid \leq \frac{1}{3}\epsilon$ gelten. Damit ist

$$\begin{aligned} \mid f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t_{n_k}) \mid &\leq \mid f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t) \mid + \mid f(x,t) - f(x,t_{n_k}) \mid \\ &\leq \frac{2\epsilon}{3} \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

36.2. **Uneigentliche Integrale.**

Wir erinnern zunächst an die Definition des Grenzwertes.

Definition 36.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M. Dann heißt $w \in M$ der *Grenzwert* von f in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a,\delta)$ ist $f(x) \in U(w,\epsilon)$.

Wir interessieren uns dabei hauptsächlich für den Fall, wo eine stetige Funktion $f :]r,s[\to \mathbb{R}$ gegeben ist und die stetige Fortsetzbarkeit nach r oder nach s geklärt werden soll. Wir wollen aber auch für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Verhalten für $x \mapsto \infty$ oder $x \mapsto -\infty$ erfassen.

Definition 36.4. Sei (M,d) ein metrischer Raum und es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt $w \in M$ der *Grenzwert* von f für $x \mapsto \infty$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq s$, ist $d(f(x), w) \leq \epsilon$.

Unter einem Randpunkt eines (ein- oder beidseitig) unbeschränkten Intervalls verstehen wir im Folgenden auch die Symbole ∞ und $-\infty$. Dies heißt nicht, dass diese Symbole zu $\mathbb{R}$ gehören, sondern lediglich, dass man dafür sinnvolle Grenzwertbetrachtungen durchführen kann.

Definition 36.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und r ein Randpunkt von I und $a \in I$. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

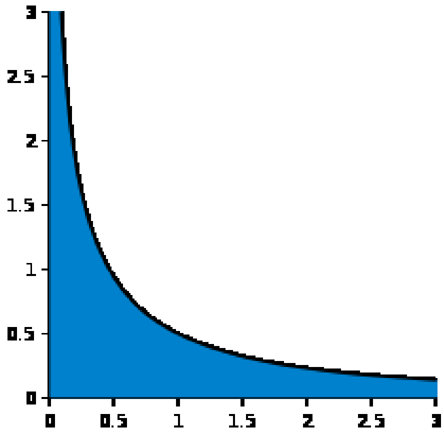
gegeben. Man sagt, dass das *uneigentliche Integral* zu f für $x \to r$ existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt$$

existiert. In diesem Fall schreibt man für diesen Grenzwert auch

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* von a nach r



Die Funktion $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, der blaue Flächeninhalt repräsentiert das (beidseitig) uneigentliche Integral.

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals hängt nicht von dem gewählten Intervallpunkt $a \in I$ ab, wohl aber der Wert des uneigentlichen Integrals. Die inhaltliche Interpretation des uneigentlichen Integrals ist wiederum der Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen, aber erstreckt über ein nicht notwendigerweise kompaktes Intervall. Wenn für die Funktion f eine Stammfunktion F bekannt ist, so geht es um das Bestimmen des Grenzwertes

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt = \lim_{x \to r} F(x) - F(a)\,.$$

Lemma 36.6. *Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ und r sei ein Randpunkt von I. Es seien*

$$f, h : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetige Funktionen mit

$$f(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in I$$

und es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^r h(t)\, dt$$

existiert. Dann existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und es gilt

$$\int_a^r f(t)\, dt \leq \int_a^r h(t)\, dt$$

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo r die obere Intervallgrenze ist. Es ist

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b h(t)\, dt$$

wegen $f(t) \leq h(t)$ für alle $t \in I$. Wegen der Nichtnegativität von h und von f wachsen beide Seite bei $b \to r$, und die rechte Seite ist durch das uneigentliche Integral $\int_a^r h(t)\, dt$ beschränkt. Nach Satz 8.9 existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \to r} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^r f(t)\, dt\,.$$

□

Beispiel 36.7. Sei $f(t) = t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für die uneigentlichen Integrale zu f für t von 0 bis 1. Dabei ist die Funktion bei der Intervallgrenze 0 nicht definiert, das ist also der kritische Randpunkt. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ die Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt \;=\; -\ln x,$$

und der Grenzwert für $x \mapsto 0$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1} t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x \to 0} \Big(\int_x^1 t^c\, dt \Big) \;=\; \lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{c+1} t^{c+1} |_x^1 \Big) \;=\; \lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1} \Big).$$

Da es sich rechts um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x \to 0} x^{c+1} = \infty$. Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Dies folgt übrigens auch aus Lemma 36.6, da ja $t^{-1} \leq t^c$ für $c < -1$ und $0 < t \leq 1$ gilt.

Sei nun $c > -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_x^1 t^c\, dt\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_x^1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine positive Potenz von x handelt, ist $\lim_{x\to 0} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $\frac{1}{c+1}$.

Beispiel 36.8. Sei $f(t) = t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das uneigentliche Integral zu f für t von 1 bis ∞. Der kritische Randpunkt ist also ∞. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ die Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x,$$

und der Grenzwert für $x \mapsto \infty$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x\to \infty}\left(\int_1^x t^c\, dt\right) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_1^x\right) = \lim_{x\to \infty}\left(\frac{x^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x\to \infty} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $-\frac{1}{c+1}$.

Bei $c > -1$ ist $t^c \geq t^{-1}$ für $t \geq 1$ und daher kann nach Lemma 36.6 das uneigentliche Integral nicht existieren.

Definition 36.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den beiden Randpunkten r und s von I. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Man sagt, dass das (*beidseitig*) *uneigentliche Integral*

$$\int_r^s f(t)\, dt$$

existiert, wenn für ein $a \in I$ die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

$$\int_r^a f(t)\, dt \text{ und } \int_a^s f(t)\, dt$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_r^s f(t)\, dt := \int_r^a f(t)\, dt + \int_a^s f(t)\, dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* zu f von r nach s.

Die Existenz des beidseitig uneigentlichen Integrals hängt nicht von der Wahl des Punktes $a \in I$ ab. Darüberhinaus hängt der Wert dieses Integrals, falls es existiert, ebensowenig von dem gewählten Punkt ab.

Beispiel 36.10. Die Funktion e^{-t^2} ist nicht elementar integrierbar, d.h. man kann keine geschlossene Stammfunktion mit rationalen Funktionen, Exponentialfunktion, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen angeben. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,,$$

was wir hier ohne Beweis mitteilen. Durch eine einfache Substitution ergibt sich daraus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

Dieses Integral nennt man *Fehlerintegral*; es spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle.

37. Vergleichskriterien

37.1. **Vergleichskriterien mit Reihen.**

Lemma 37.1. *Sei $I = [1, \infty]$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{1}^{\infty} f(t)\,dt$$

genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert.

Beweis. Wenn das uneigentliche Integral existiert, so betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_{1}^{k} f(t)\,dt\,,$$

die darauf beruht, dass die linke Seite das Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion für f auf $[1, k]$ ist. Da die rechte Seite beschränkt ist, gilt dies auch für die linke Seite, so dass wegen $f(n) \geq 0$ die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so betrachten wir die Abschätzung

$$\int_{1}^{k} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{k} f(n)\,,$$

die gilt, da die rechte Seite das Treppenintegral zu einer oberen Treppenfunktion ist. Wegen $f(t) \geq 0$ ist die Integralfunktion $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ wachsend und beschränkt, da die rechte Seite wegen der Konvergenz der Reihe beschränkt ist. Daher besitzt die Integralfunktion für $x \mapsto \infty$ einen Grenzwert und das uneigentliche Integral existiert. $\square$

Beispiel 37.2. Die Funktion

$$f : [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \frac{1}{t},$$

ist streng fallend. Daher ist die Funktion g, die für x mit $k \leq x < k+1$ durch $\frac{1}{k}$ definiert ist, eine Majorante für f, also $g(t) \geq f(t)$. Auf jedem Intervall $[1, n]$ liefert g eine obere Treppenfunktion zu f. Ebenso liefert die durch $\frac{1}{k+1}$ bei $k \leq x < k+1$ definierte Funktion h eine untere Treppenfunktion für f. Daher gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\,.$$

Das Integral in der Mitte besitzt den Wert $\ln n$. Die Differenz zwischen der linken und der rechten Summe ist $1 - \frac{1}{n}$. Daher ist die Differenz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

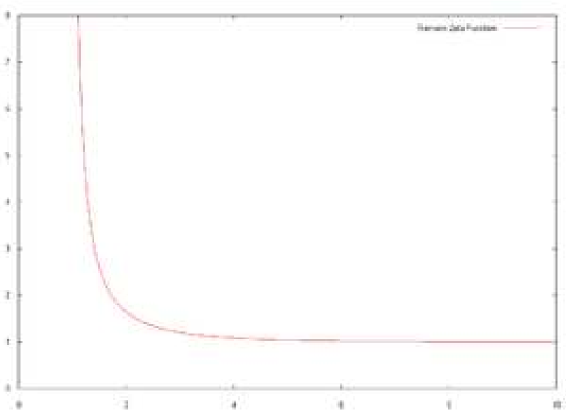
für jedes n positiv, mit n wachsend und nach oben beschränkt. Daher existiert für $n \to \infty$ der Limes, und dieser Limes ändert sich nicht, wenn man vorne in der Summe bis n aufsummiert anstatt bis $n-1$. Wir setzen

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \Big)$$

und nennen sie die *eulersche Konstante* (oder *Mascheronische Konstante*). Ihr nummerischer Wert ist ungefähr

$$\gamma = 0{,}5772156649\ldots\,.$$

Es ist ein offenes mathematisches Problem, ob diese Zahl rational ist oder nicht.



Die Riemannsche Zeta-Funktion im Reellen

Nach Beispiel 36.8 existiert für $c < -1$ das uneigentliche Integral $\int_1^\infty t^c \, dt$, so dass aufgrund von Lemma 37.1, auch die Reihen $\sum_{n=1}^\infty n^c = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{-c}}$ konvergieren. Daher ist die folgende Funktion wohldefiniert.

Definition 37.3. Die *Riemannsche ζ-Funktion* ist für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > 1$ definiert durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \, .$$

Diese Funktion lässt sich komplex fortsetzen und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie.

37.2. **Die Fakultätsfunktion.**

Beispiel 37.4. Sei $x > -1$. Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} \, dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also ∞) betrachten wir eine natürliche Zahl $n \geq x$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion, gibt es ein $a \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ gilt für alle $t \geq a$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t} \, dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t} \, dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} \, dt \\ &= 2(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}) \leq 2e^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ wächst das linke Integral und ist durch $2e^{-\frac{a}{2}}$ beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei $-1 < x \leq 0$ problematisch ist) müssen wir wegen $e^{-t} \leq 1$ nach Lemma 36.6 nur $\int_0^1 t^x \, dt$ betrachten. Die Stammfunktion davon ist $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$, deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für $t \to 0$ existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t} \, dt$$

existiert also für $x \in \mathbb{R}, \; x > -1$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

Definition 37.5. Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, heißt die Funktion

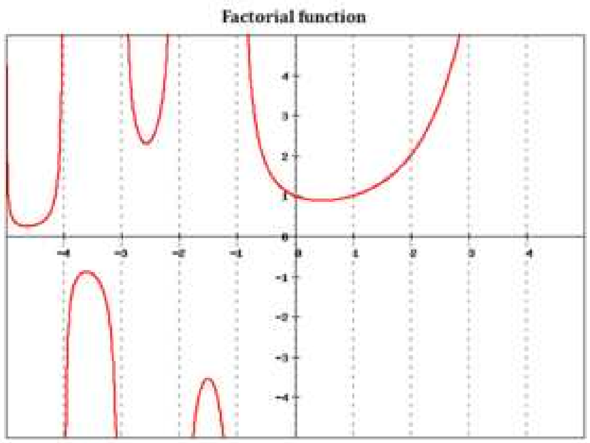
$$x \mapsto \operatorname{Fak}(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

die *Fakultätsfunktion.*

Die durch

$$\Gamma(x) := \operatorname{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion heißt *Gamma-Funktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät noch deutlicher, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird.



Satz 37.6. *Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$ *für* $x > 0$.
(2) $\operatorname{Fak}(0) = 1$.
(3) $\operatorname{Fak}(n) = n!$ *für natürliche Zahlen* $n \in \mathbb{N}$.
(4) $\operatorname{Fak}(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen $b \geq a > 0$ bei fixiertem $x > 0$)

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ geht $b^x e^{-b} \to 0$ und für $a \to 0$ geht $a^x e^{-a} \to 0$ (da x positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diesen Grenzwertprozess an, so erhält man $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$. (2). Es ist

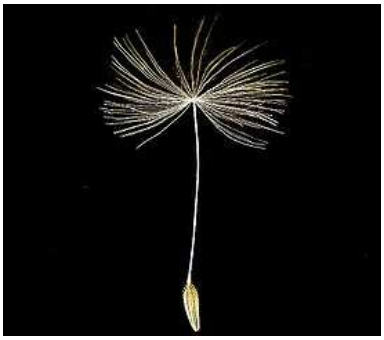
$$\operatorname{Fak}(0) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\mathrm{Fak}\,(-\frac{1}{2}) \;=\; \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt \;=\; 2\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\, ds \;=\; \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution $t = s^2$ und dem sogenannten Fehlerintegral. □

37.3. **Gewöhnliche Differentialgleichungen.**



Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe und der Änderung dieser Größe aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 37.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,y) \longmapsto f(t,y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t,y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t,y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 37.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Definition 37.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ gegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 37.10. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ gegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0 ,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine solche Differentialgleichung bzw. Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Definition 37.11. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ gilt mit einer Funktion g in der einen Variablen t.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Definition 37.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

38. Lineare Differentialgleichungen

38.1. **Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Definition 38.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

heißt *lineare Differentialgleichung* bzw. genauer *gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung.*

Linear bedeutet hierbei, dass in $f(t, y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0, y)$ eine lineare Funktion in y.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 38.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp\left(G(t)\right) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 32.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned} \left(\frac{y(t)}{\exp\, G(t)}\right)' &= \frac{y'(t) \exp\, G(t) - y(t) \cdot (\exp\left(G(t)\right) \cdot g(t)}{\exp^2\, G(t)} \\ &= \frac{y(t)g(t) \exp\, G(t) - y(t) \cdot (\exp\left(G(t)\right) \cdot g(t)}{\exp^2\, G(t)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

so dass aufgrund von Lemma 32.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp\, G(t)}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp\left(G(t_0)\right)}$ eindeutig fest. $\square$

Beispiel 38.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 32.6, aber auch aus Satz 38.2.

Beispiel 38.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 38.5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay$$

besitzt nach Satz 38.2 die Lösungen

$$y(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 38.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 38.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 38.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 1$)

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\,.$$

Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right) = c \cdot \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\,.$$

Beispiel 38.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2+1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) \;=\; \frac{1}{t^2+1},$$

eine solche ist durch

$$G(t) = \;\arctan t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp(\arctan t)\,.$$

38.2. **Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Es gibt homogene lineare Gleichungsysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 38.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.*

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 38.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$. Es sei G eine Stammfunktion von g und es sei

$$a(t) = \exp(G(t))$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen

$$y(t) = c(t)a(t)\,,$$

wobei $c(t)$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ ist. Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekannten (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t)\,.$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als

$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$

schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn

$$c'(t)a(t) = h(t)$$

bzw.

$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$

gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit c ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung

$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$

legt dann c_0 eindeutig fest. □

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten.* Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 38.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2\,.$$

Die Exponentialfunktion e^t ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 38.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} = t^2 \cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t((-t^2 - 2t - 2)e^{-t} + c) = -t^2 - 2t - 2 + ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9 - 6 - 2 + ce^3 = -17 + ce^3 = 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \frac{21}{e^3}e^t.$$

Beispiel 38.12. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1} + t - 1 \text{ mit der Anfangsbedingung } y(2) = 5.$$

Hier ist also $h(t) = t - 1$ der Störterm und

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Die Stammfunktion von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$G(t) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).$$

Daher sind nach Satz 38.2 (bzw. nach Beispiel 38.7) die Lösungen zur homogenen Gleichung gleich

$$a(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}.$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} \cdot (t-1) = \sqrt{t+1} \cdot \sqrt{t-1} = \sqrt{t^2-1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) = \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t).$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t) + c\right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \operatorname{arcosh} 2) + c_0\right) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arcosh} 2 + c_0\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 = 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \text{ arcosh } 2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} (t\sqrt{t^2-1} - \text{ arcosh } t) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \text{ arcosh } 2 \right).$$

39. Getrennte Variablen

39.1. Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.

Definition 39.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Diese ist offen, wenn I und J offen sind. Eine homogene lineare Differentialgleichung besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt.

Satz 39.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit zwei stetigen Funktionen

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t)).$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \textit{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ *und* $H(y_0) = 0$ *erfüllen, so ist*

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H streng monoton ist und daher bijektiv. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{1/h(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, ds = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, ds = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)}\, dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 und $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$.

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen muss man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenze wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und $\tilde{H}$ zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und $\tilde{G}$ zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h. die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Die Umkehrfunktion zu $\tilde{H} = (+c) \circ H$ ist $\tilde{H}^{-1} = H^{-1} \circ (-c)$. Daher ergibt sich aus

$$(H^{-1} \circ (-c))(\tilde{G}(t_0)) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t_0)) = H^{-1}(G(t_0))$$

durch Anwenden von H die Gleichheit

$$(-c)(\tilde{G}(t_0)) = \tilde{G}(t_0) - c = G(t_0) + d - c = G(t_0),$$

also muss $d = c$ sein. Daraus ergibt sich, dass die Gleichung

$$y(t) = \tilde{y}(t)$$

für alle t gilt. □

Durch einen Übergang von G nach $G+c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit $G(I') \subseteq H(J)$. Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

Korollar 39.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1} : J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t+c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall[5] *$H(J) - c$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 39.2. □

Korollar 39.4. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ und einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}\,,$$

wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Beweis. Siehe Aufgabe 39.9. □

Beispiel 39.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 39.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y} = y$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 35.11 die Funktion

$$H : J \longrightarrow J' = \mathbb{R},\ y \longmapsto H(y) = \ln\left(\tan \frac{y}{2}\right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln\left(\tan \frac{y}{2}\right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2 \arctan\left(e^u\right).$$

[5] Mit $I+c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I+c = \{x \in \mathbb{R} \mid x - c \in I\}$. Bei $I = [a,b]$ ist also $I+c = [a+c, b+c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}+c = \mathbb{R}$.

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2 \arctan\left(e^{t+c}\right)$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 39.6. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 39.3 $\frac{1}{h(y)} = y$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2 .$$

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 39.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}} .$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}t^2 + c)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d.h. die Lösung „entweicht“.

Beispiel 39.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

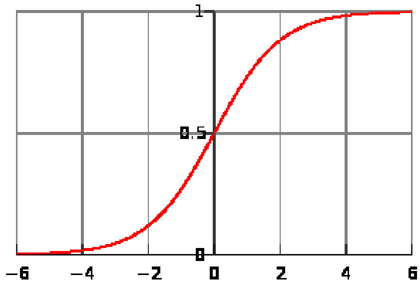
für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}} .$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t^2 + c)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Lösung $g(t) = \frac{1}{t}$.



Eine logistische Funktion

Beispiel 39.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t. Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t. Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p. Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich aber natürlich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß des oben formulierten Zusammenhanges gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t))\,.$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate*

$w(p) = a$ liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*. Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s(1 - \frac{1}{g}p)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp(1 - \frac{1}{g}p) = sp - \frac{s}{g}p^2 .$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp(1 - \frac{1}{g}p)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s}(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p}) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s}(\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

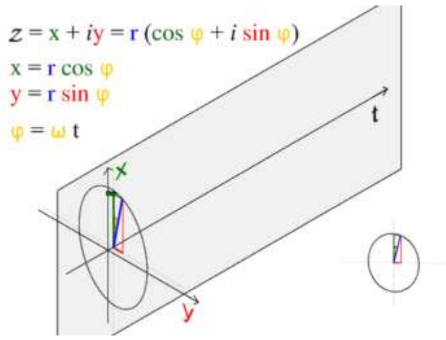
Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$.

40. Differenzierbare Kurven

40.1. **Differenzierbare Kurven.**



Eine Animation des Graphen der trigonometrischen Parametrisierung des Einheitskreises. Die grünen Punkte sind Punkte des Graphen.

Es sei I ein reelles Intervall, V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Eine solche Abbildung nennen wir auch eine *Kurve* oder einen *Weg* in V. Häufig stellt man sich dabei I als ein Zeitintervall und die Abbildung als einen Bewegungsprozess im Raum V vor. Jedem Zeitpunkt $t \in I$ wird also ein Ortspunkt $f(t) \in V$ zugeordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, sich eine solche Abbildung zu veranschaulichen. Bei eindimensionalem V, also $V = \mathbb{R}$, ist der Graph die übliche Darstellungsweise. Einen Graphen gibt es bekanntlich zu jeder Abbildung. Bei $V \cong \mathbb{R}^2$ ist der Graph eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$. Häufig skizziert man bei einer Kurve bei $V = \mathbb{R}^2$ oder $V = \mathbb{R}^3$ nur das Bild der Kurve. Man beachte aber, dass das Bild nur eine Teilinformation der Abbildung aufzeigt.

Bei einem Bewegungsprozess interessiert man sich natürlich für die „Geschwindigkeit“ zu einem bestimmten Zeitpunkt. Dabei versteht man unter Geschwindigkeit nicht nur deren Betrag, sondern auch deren Richtung. Diese Vorstellung wird durch den Begriff der differenzierbaren Kurve präzisiert, der eine direkte Verallgemeinerung von differenzierbaren Funktionen ist. Die Idee ist wieder, zu zwei Zeitpunkten $t < t'$ die Steigung der Sekante (die wir wieder den *Differenzenquotienten* nennen)

$$\frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \in V$$

und davon den Limes für $t' \mapsto t$ zu betrachten. Um einen Limes bilden zu können, brauchen wir, wie schon im Eindimensionalen, eine Metrik (eine Abstandsfunktion) auf V. Wir werden daher euklidische Vektorräume betrachten, also reelle endlichdimensionale Vektorräume, für die ein Skalarprodukt erklärt ist. Für den Begriff des Skalarprodukt siehe die 18. Vorlesung aus dem ersten Semester. Ein Skalarprodukt auf V definiert über

$$|| v ||:= \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm und über

$$d(u, v) :=|| u - v ||$$

eine Metrik. Für einen Vektor v, der bzgl. einer Orthonormalbasis durch die Koordinaten

$$v = (v_1, \ldots, v_n)$$

gegeben ist, lautet die Formel für die Norm

$$|| v ||= \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} .$$

Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ und damit eine dadurch induzierte bijektive lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto v_i,$$

gibt, gibt es auch auf jedem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ein Skalarprodukt und damit eine euklidische Metrik. Diese hängt jedoch von der gewählten Basis ab. Allerdings hängen die offenen Mengen, der Konvergenzbegriff und Grenzwerteigenschaften nicht von einer solchen Wahl ab, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 40.1. *Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum. Es seien zwei Skalarprodukte $\langle -, - \rangle_1$ und $\langle -, - \rangle_2$ auf V gegeben. Dann stimmen die über die zugehörigen Normen $|| - ||_1$ und $|| - ||_2$ definierten Topologien überein, d.h. eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann offen bzgl. der einen Metrik, wenn sie offen bzgl. der anderen Metrik ist.*

Beweis. Zu einem Skalarprodukt in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum gibt es eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$. Eine solche Orthonormalbasis definiert eine bijektive lineare Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow V,\, e_i \longmapsto u_i,$$

die eine Isometrie ist. Insbesondere ist eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann offen, wenn die entsprechende Menge $\psi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Die zwei vorgegebenen Skalarprodukte entsprechen zwei bijektiven linearen Abbildungen $\psi_1 : \mathbb{R}^n \to V$ und $\psi_2 : \mathbb{R}^n \to V$, wobei die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ jeweils auf eine Orthonormalbasis bzgl. des jeweiligen Skalarprodukts abgebildet wird. Diese Abbildungen sind Isometrien, so dass eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann bzgl. des Skalarproduktes $\langle -, - \rangle_i$ offen ist, wenn dass Urbild $(\psi_i)^{-1}(U)$ offen im $\mathbb{R}^n$ bzgl. der euklidischen Standardmetrik ist. Die Verknüpfungen

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sind lineare Abbildungen und nach Satz 20.11 stetig, so dass sich die offenen Mengen entsprechen: Ist nämlich $U \subseteq V$ offen bzgl. der ersten Metrik, so ist $\psi_1^{-1}(U)$ offen und damit ist wegen der Stetigkeit von $\psi_1^{-1} \circ \psi_2$ auch

$$(\psi_1^{-1} \circ \psi_2)^{-1}(\psi_1^{-1}(U)) \,=\, \psi_2^{-1}(\psi_1(\psi_1^{-1}(U)) \,=\, \psi_2^{-1}(U)$$

offen, so dass U auch bzgl. der zweiten Metrik offen ist. □

Für uns bedeutet das, dass die im Folgenden zu entwickelnden Differenzierbarkeitsbegriffe nicht vom gewählten Skalarprodukt abhängt. Mit etwa mehr Aufwand kann man auch zeigen, dass eine beliebige (nicht notwendigerweise euklidische) Norm auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum ebenfalls die gleiche Topologie definiert, und man genauso gut mit einer beliebigen Norm arbeiten könnte. Wenn wir es mit komplexen endlichdimensionalen Vektorräumen zu tun haben, so werden wir diese einfach als reelle Vektorräume (der doppelten Dimension) auffassen und ebenfalls mit einer euklidischen Norm versehen.

Definition 40.2. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f in $t \in I$ *differenzierbar*, wenn der Limes

$$\lim\nolimits_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existiert. Dieser Limes heißt dann die *Ableitung* von f in t und wird mit

$$f'(t)$$

bezeichnet.

Die Ableitung ist selbst wieder ein Vektor in V.

Definition 40.3. Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Dann heißt f *differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $t \in I$ differenzierbar ist. Die Abbildung

$$I \longrightarrow V,\, t \longmapsto f'(t),$$

heißt dann die *Ableitung* von f.

Die Ableitung einer differenzierbaren Kurve ist damit selbst wieder eine Kurve. Wenn die Ableitung stetig ist, so nennt man die Kurve *stetig differenzierbar.*

Das folgende Lemma zeigt, dass dieser Differenzierbarkeitsbegriff nichts wesentlich neues ist, da er auf die Differenzierbarkeit von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

Lemma 40.4. *Es sei I ein reelles Intervall, V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f : I \longrightarrow V$$

eine Abbildung. Es sei v_j, $j \in J$, eine Basis von V und es seien

$$f_j : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

die zugehörigen Komponentenfunktionen von f. Es sei $t \in I$. Dann ist f genau dann differenzierbar in t, wenn sämtliche Funktionen f_j in t differenzierbar sind. In diesem Fall gilt (bei $J = \{1, 2, \ldots, n\}$)

$$f'(t) = f_1'(t)v_1 + f_2'(t)v_2 + \ldots + f_n'(t)v_n .$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ und $t \in I$, $t \neq t_0$. Es ist

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \frac{\sum_{j=1}^n f_j(t)v_j - \sum_{j=1}^n f_j(t_0)v_j}{t - t_0} = \sum_{j=1}^n \frac{f_j(t) - f_j(t_0)}{t - t_0} v_j .$$

Nach Aufgabe 40.8 existiert der Limes links für $t \to t_0$ genau dann, wenn der entsprechende Limes rechts komponentenweise existiert. □

Beispiel 40.5. Die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2 - t^3, t \cdot \sin t\,, e^{-t})$$

ist in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und zwar ist

$$f'(t) = (2t - 3t^2, \sin t\ + t \cdot \cos t\,, -e^{-t}) .$$

Lemma 40.6. *Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien*

$$f, g : I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Summe*

$$f + g : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) .$$

(2) *Das Produkt*

$$hf : I \longrightarrow V,\ t \longmapsto h(t) \cdot f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0) \cdot f'(t_0) + h'(t_0) \cdot f(t_0) .$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0) .$$

(3) *Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion*

$$\frac{f}{h} : I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$(\frac{f}{h})'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 40.4. □

Man kann natürlich zwei Abbildungen $f, g : I \to V$ nicht miteinander multiplizieren, so dass in der obigen Produktregel eine differenzierbare Kurve und eine differenzierbare Funktion auftritt. Ebenso muss die Kettenregel mit Bedacht formuliert werden. Später werden wir noch eine allgemeinere Kettenregel kennenlernen.

Lemma 40.7. *Es seien I und J zwei reelle Intervalle, es sei*

$$h : I \longrightarrow J,\, s \longmapsto h(s),$$

eine in $s_0 \in I$ differenzierbare Funktion und es sei

$$f : J \longrightarrow V,\, t \longmapsto f(t),$$

eine in $t_0 = h(s_0)$ differenzierbare Kurve in einen euklidischen Vektorraum V. Dann ist auch die zusammengesetzte Kurve

$$f \circ h : I \longrightarrow V,\, s \longmapsto f(h(s)),$$

in s_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ h)'(s_0) \;=\; h'(s_0) \cdot f'(h(s_0)).$$

Beweis. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ die Komponentenfunktionen von f bzgl. einer Basis von V. Nach der Kettenregel in einer Variablen gilt

$$(f_i \circ h)'(s_0) \;=\; h'(s_0) \cdot f_i'(h(s_0))$$

für jedes $i = 1, \ldots, n$. Dies ist wegen Lemma 40.4 die Behauptung. □

Lemma 40.8. *Es sei I ein reelles Intervall, V und W seien euklidische Vektorräume und es sei*

$$f : I \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Kurve. Es sei

$$L : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist auch die zusammengesetzte Abbildung

$$L \circ f : I \longrightarrow W,\, t \longmapsto L(f(t)),$$

differenzierbar und es gilt

$$(L \circ f)'(t) \;=\; L(f'(t)).$$

Beweis. Sei $t_0 \in I$ fixiert und sei $t \in I$, $t \neq t_0$. Wegen der Linearität ist

$$L(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}) = \frac{L(f(t))-L(f(t_0))}{t-t_0}.$$

Wegen der Voraussetzung und der Stetigkeit einer linearen Abbildung existiert der Limes links für $t \to t_0$, also existiert auch der Limes rechts, und das bedeutet, dass der Differentialquotient der zusammengesetzten Abbildung $L \circ f$ existiert. □

41. Rektifizierbare Kurven

41.1. **Die Mittelwertabschätzung für differenzierbare Kurven.**

Satz 41.1. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$f : [a,b] \longrightarrow V,\ t \longmapsto f(t),$$

eine differenzierbare Kurve. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit

$$||\, f(b) - f(a)\, || \leq (b-a) \cdot ||\, f'(c)\, ||\ .$$

Beweis. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, so ist die Aussage trivialerweise richtig. Sei also $f(a) \neq f(b)$. Dann ist $u_1 = \frac{f(b)-f(a)}{||f(b)-f(a)||}$ nach dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren Teil einer Orthonormalbasis von V. Es seien $f_1, \ldots, f_n$ die Komponentenfunktionen von f bzgl. dieser Basis. Wir wenden den Mittelwertsatz für eine Variable auf die erste Komponentenfunktion f_1 an. Es ergibt sich, dass ein $c \in I$ existiert mit der Eigenschaft

$$f_1(b) - f_1(a) = (b-a) \cdot f_1'(c)$$

und damit auch

$$|\, f_1(b) - f_1(a)\, | = |\, b-a\, | \cdot |\, f_1'(c)\, |\ .$$

Da man die Längenmessung mit jeder Orthonormalbasis durchführen kann, gilt

$$\begin{aligned} ||\, f(b) - f(a)\, || &= ||\, (f_1(b) - f_1(a))u_1\, || \\ &= |\, f_1(b) - f_1(a)\, | \\ &= |\, b-a\, | \cdot |\, f_1'(c)\, | \\ &\leq |\, b-a\, | \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \cdot (f_i'(c))^2} \\ &= |\, b-a\, | \cdot ||\, f'(c)\, ||\ . \end{aligned}$$

□

Beispiel 41.2. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung* des *Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (\cos t\, , \sin t\,).$$

Diese Abbildung ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = (-\sin t\,, \cos t\,)\,.$$

Die Norm dieser Ableitung ist zu jedem Zeitpunkt gleich

$$f'(t) \;=\; \sqrt{\sin^2 t \,+\, \cos^2 t} \;=\; 1.$$

Wählen wir das Intervall $[0, 2\pi]$, so ist

$$f(0) \;=\; (0,0) \;=\; f(2\pi).$$

Dies bedeutet, dass im Mittelwertsatz nicht Gleichheit gelten kann.

41.2. **Länge von Kurven.**

Wir arbeiten im $\mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Metrik. Zu einer Kurve

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto f(t),$$

die wir uns als einen von der Zeit abhängigen Bewegungsvorgang im Raum vorstellen, wollen wir die Länge der Kurve definieren. Die Länge soll dabei den insgesamt zurückgelegten Weg beschreiben, nicht die Länge der zurückgelassenen Spur oder den Abstand von Start- und Zielpunkt.

Definition 41.3. Zu einer Punktfolge

$$P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$$

nennt man

$$\sum_{i=1}^{k} d(P_i, P_{i-1})$$

die *Gesamtlänge* des *Streckenzugs* $[P_0, P_1, \ldots, P_k]$.

Definition 41.4. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zu einer Unterteilung

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k-1} \leq t_k = b$$

nennt man

$$[P_0, P_1, \ldots, P_k] = [f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_k)]$$

den zugehörigen *Streckenzug*.

Dabei sollte man sich die Unterteilung als eine Zeiteinteilung vorstellen und die Punkte $P_i = f(t_i)$ als die zugehörigen Orte der durch f beschriebenen Bewegung im $\mathbb{R}^n$.

Definition 41.5. Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann nennt man

$$L(f) = \sup\left(L(f(t_0), \ldots, f(t_k)\right),$$

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k-1} \leq t_k = b \text{ Unterteilung, } k \in \mathbb{N})$$

die *Kurvenlänge* von f. Wenn $L(f)$ endlich ist, so heißt die Kurve f *rektifizierbar.*

Man nimmt hier also das Supremum über alle möglichen Unterteilungen des Definitionsintervalls. Ohne zusätzliche Eigenschaften der Kurve kann man nicht erwarten, dass man die Kurvenlänge effektiv bestimmen kann. Wenn die Kurve aber stetig differenzierbar ist, so lässt sich die Länge über ein Integral berechnen, wie die folgende Aussage zeigt. Inhaltlich gesprochen bedeutet sie, dass wenn sich bspw. ein Fahrzeug in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bewegt, man die Gesamtlänge der zurückgelegten Strecke kennt, sobald man nur zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit (und zwar lediglich ihren Betrag, die Richtung muss man nicht kennen) kennt. Die Länge ist dann das Integral über den Betrag der Geschwindigkeit.

Satz 41.6. *Es sei* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall und*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung, die stetig differenzierbar sei. Dann ist f *rektifizierbar und es gilt für die Kurvenlänge*

$$L(f) = \int_a^b ||\, f'(t)\, || \; dt\, .$$

Beweis. Da die Norm stetig ist, existiert nach Satz 32.3 das rechte Integral, und zwar ist es gleich dem Infimum über alle Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen der Funktion $t \mapsto ||\, f'(t)\, ||$. Diese Treppenintegrale werden zu einer Unterteilung $a = t_0 \leq \ldots \leq t_k = b$ durch $\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) w_i$ mit $w_i = \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i)$ gegeben. Andererseits steht nach der Definition der Kurvenlänge links das Supremum über die zu einer solchen Unterteilung gehörigen Summen

$$\sum_{i=1}^k ||\, f(t_i) - f(t_{i-1})\, || \; .$$

Aufgrund des Mittelwertsatzes gilt

$$||\, f(t_i) - f(t_{i-1})\, || \leq \; (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Durch Aufsummieren ergibt sich daher die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^k ||\, f(t_i) - f(t_{i-1})\, || \leq \; \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot \sup\,(||\, f'(t)\, ||, t_{i-1} \leq t \leq t_i).$$

Hierbei müssen wir links das Supremum und rechts das Infimum über alle Unterteilungen nehmen. Nehmen wir an, dass das Supremum u der linken Seite größer als das Infimum v der rechten Seite ist. Dann gibt es eine Unterteilung derart, dass die Längensumme links zu dieser Unterteilung mindestens gleich $u - \frac{1}{3}(u - v)$, und eine Unterteilung derart, dass das Treppenintegral rechts höchstens gleich $v + \frac{1}{3}(u - v)$ ist. Wir können zur gemeinsamen Verfeinerung übergehen und annehmen, dass es sich um die gleiche Unterteilung handelt, und erhalten einen Widerspruch.Das Supremum der linken Seite ist also durch das Infimum der rechten Seite beschränkt. D.h. die Kurve ist rektifizierbar und es gilt

$$L(f) \leq \int_a^b || f'(t) || \; dt \leq (b-a) \cdot \sup (|| f'(t) ||, t \in [a,b]).$$

Diese Beziehung gilt auch für jedes beliebige Teilintervall $[s, s'] \subseteq [a, b]$. Es sei $L_a^s(f)$ die Länge der auf $[a, s]$ definierten Kurve. Es genügt dann zu zeigen, dass diese Funktion eine Stammfunktion zu $t \mapsto || f'(t) ||$ ist. Für den zugehörigen Differenzenquotienten $\frac{L_a^{s'}(f) - L_a^s(f)}{s'-s} = \frac{L_s^{s'}(f)}{s'-s}$ in einem Punkt $s \in [a, b]$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \frac{|| f(s') - f(s) ||}{s' - s} &\leq \frac{L_s^{s'}(f)}{s' - s} \\ &\leq \frac{(s' - s) \cdot \sup (|| f'(t) ||, t \in [s, s'])}{s' - s} \\ &= \sup (|| f'(t) ||, t \in [s, s']). \end{aligned}$$

Für $s' \to s$ konvergieren die beiden äußeren Seiten gegen $|| f'(s) ||$, so dass auch der Differenzenquotient dagegen konvergieren muss. □

Die Rektifizierbarkeit ist schon in einer Variablen ein interessanter Begriff. Es lässt sich sogar die Rektifizierbarkeit darauf zurückführen.

Lemma 41.7. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Dann ist f genau dann rektifizierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Beweis. Siehe Aufgabe 41.6. □

Beispiel 41.8. Die Rektifizierbarkeit ist schon für Funktionen

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto f(t),$$

ein nicht-trivialer Begriff, siehe Beispiel 41.9. Wenn allerdings f wachsend (oder fallend) ist, so lässt sich die Länge einfach ausrechnen. Zu einer beliebigen Unterteilung $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k = b$ ist dann nämlich

$$\sum_{i=1}^k | f(t_i) - f(t_{i-1}) | = \sum_{i=1}^k (f(t_i) - f(t_{i-1})) = f(b) - f(a),$$

d.h. die Länge ist einfach die Differenz der Werte an den Randpunkten des Intervalls. Insbesondere existiert die Länge, d.h. monotone Funktionen sind rektifizierbar. Wenn f wachsend ist und stetig differenzierbar, so ergibt sich dies natürlich auch aus Satz 41.6 und aus Korollar 32.7. Wenn f allerdings nicht monoton ist, so müssen bei der Längenberechnung auch die Richtungsänderungen mitberücksichtigt werden. Für das Integral $\int_a^b |f'(t)| \; dt$ gibt es keine direkte Berechnung, da dann $f'(t)$ das Vorzeichen ändert. Man kann aber das Intervall in Abschnitte unterteilen, wo die Funktion wachsend oder fallend, bzw. wo die Ableitung positiv oder negativ ist, und dann abschnittsweise die Länge berechnen.

Beispiel 41.9. Die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ bei } x > 0\,, \\ 0 \text{ bei } x = 0\,, \end{cases}$$

ist stetig, aber nicht rektifizierbar. Für jedes $x_n = \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi}$ ist $f(x_n) = \pm x_n$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob n gerade oder ungerade ist. Für jedes n ist daher $| f(x_n) - f(x_{n-1}) | \geq 2x_n$. Wählt man dann die Unterteilungspunkte

$$t_0 < x_k < x_{k-1} < \ldots < x_1 < x_0 = \frac{2}{\pi} < 1\,,$$

so ist die Länge des zugehörigen Streckenzugs mindestens gleich

$$\sum_{n=1}^{k} 2x_n \;=\; 2 \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n\pi + \frac{1}{2}\pi} \;=\; \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \;\geq\; \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n+1}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe ist dieser Ausdruck für $k \to \infty$ nicht beschränkt. Daher kann das Supremum über alle Streckenzüge nicht existieren und die Kurve ist nicht rektifizierbar.

Korollar 41.10. *Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Länge des Graphen von f gleich

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx\,.$$

Beweis. Mit der Länge des Graphen ist die Länge der durch $x \mapsto g(x) = (x, f(x))$ definierten Kurve gemeint. Die Ableitung dieser Kurve ist $g'(x) = (1, f'(x))$. Daher ist die Länge dieser Kurve nach Satz 41.6 gleich

$$L \;=\; \int_a^b || g'(x) || \; dt \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dt.$$

$\square$

Beispiel 41.11. Wir wollen die Länge der *Standardparabel* berechnen, also die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t, t^2)$$

gegebenen Kurve. Nach Korollar 41.10 ist die Länge von 0 nach b gleich

$$\begin{aligned}\int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2b} \sqrt{1+u^2}\,du \\ &= \frac{1}{4}(u\sqrt{1+u^2} + \operatorname{arsinh} u\,)|_0^{2b} \\ &= \frac{1}{2}b\sqrt{1+4b^2} + \operatorname{arsinh}(2b)\,.\end{aligned}$$

Beispiel 41.12. Wir betrachten die Funktion

$$f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{1-x^2},$$

die die obere Kreislinie des Einheitskreises beschreibt. Wir wollen die Länge dieses Graphen bestimmen. Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Daher geht es um das Integral von

$$\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Stammfunktion davon ist $\arcsin x$. Daher ist

$$L = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x\,|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Beispiel 41.13. Wir betrachten die *trigonometrische Parametrisierung des Einheitskreises*, also die Abbildung

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto f(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,).$$

Die Ableitung davon ist

$$f'(t) = (-\sin t\,,\, \cos t\,)\,.$$

Daher ist die Kurvenlänge eines von a bis b durchlaufenen Teilstückes gleich

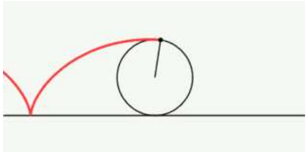
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{(-\sin t\,)^2 + (\cos t\,)^2}\,dt = \int_a^b 1\,dt = b-a.$$

Aufgrund der Periodizität der trigonometrischen Funktionen wird der Einheitskreis von 0 bis 2π genau einmal durchlaufen. Die Länge des Kreisbogens ist daher 2π.

Beispiel 41.14. Es sei ein Punkt V auf der Peripherie des Einheitskreises fixiert (bspw. ein Ventil). Die *Zykloide* ist diejenige Kurve, die der Punkt beschreibt, wenn der Einheitskreis sich gleichmäßig auf einer Geraden bewegt, wie wenn ein Rad auf der Straße fährt. Wenn t den Winkel bzw. die abgerollte Strecke repräsentiert, und der Punkt V sich zum Zeitpunkt $t=0$ in $(0,0)$ befindet, so wird die Bewegung des Ventils durch

$$V:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto V(t) = (t - \sin t\,, 1 - \cos t\,).$$

beschrieben.



Nach einer Volldrehung befindet sich das Ventil wieder in seiner Ausgangsposition am Rad, aber verschoben um 2π. Die Ableitung dieser Kurve ist

$$W'(t) = (1 - \cos t\,, \sin t\,)\,.$$

Die Länge der Zykloide (also die Länge des vom Ventil beschriebenen Weges) ist nach Satz 41.6 im Zeitintervall von 0 nach s gleich

$$\begin{aligned}
\int_0^s \sqrt{(1 - \cos t\,)^2 + \sin^2 t}\; dt &= \int_0^s \sqrt{2 - 2\cos t}\; dt \\
&= \sqrt{2}\int_0^s \sqrt{1 - \cos t}\; dt \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos(\pi + 2u)}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos 2u}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 u - \sin^2 u}\; du \\
&= 2\sqrt{2}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \sqrt{2\cos^2 u}\; dt \\
&= 4\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}} \cos u\; dt \\
&= 4(\sin u\,|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{s-\pi}{2}}).
\end{aligned}$$

Für $s = 2\pi$ ist dies $4 \cdot 2 = 8$.

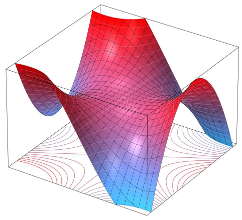
42. Richtungsableitung

Wir wenden uns nun der Differentialrechnung zu für Abbildungen, wo der Definitionsbereich höherdimensional ist. Dazu seien zwei reelle (oder komplexe) endlichdimensionale Vektorräume V und W gegeben. Ferner sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Diese Abbildung wollen wir „differenzieren“. Anders als in den bisher behandelten Situationen gibt es bei einem höherdimensionalen Definitionsbereich mehrere nicht äquivalente Konzepte von Differenzierbarkeit. Wir werden nacheinander die *Richtungsableitung*, *partielle Ableitungen* und das *totale Differential* sowie ihre Beziehungen untereinander diskutieren. Wir werden durchgehend voraussetzen, dass die Vektorräume euklidisch sind.

Bei komplexen Vektorräumen soll der zugrunde liegende reelle Vektorraum mit einem (reellen) Skalarprodukt und damit mit einer euklidischen Metrik versehen sein.



Es ist erstmal keine Einschränkung, wenn man sich auf reelle Vektorräume beschränkt und überdies den Zielraum als $W = \mathbb{R}$ ansetzt. Als Definitionsmenge kann man sich zunächst auf $G = \mathbb{R}^2 = V$ beschränken, und sich vorstellen, dass die Abbildung jedem Grundpunkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen Höhepunkt zuordnet, so dass die Abbildung insgesamt ein Gebirge über einer Grundfläche beschreibt.

42.1. **Richtungsableitung.**

Wir stellen uns vor, wir sind an einem Ort im Gebirge und entschließen uns, in eine bestimmte Richtung, bspw. nach Nordwest zu gehen, egal was kommen mag. Damit machen wir sämtliche Steigungen und Abhänge mit, die das Gebirge uns in dieser vorgegebenen Richtung bietet. Dabei lernen wir nur den Höhenverlauf des Gebirges entlang dieses linearen Ausschnitts kennen. Durch die gewählte Richtung bewegen wir uns auf dem Graphen zu einer Funktion in einer einzigen Variablen, nämlich einer Variablen der Grundgeraden. Dies ist die Grundidee der *Richtungsableitung*.

Definition 42.1. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung. Weiter sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt φ *differenzierbar in P in Richtung v*, falls der Grenzwert

$$\lim_{s \to 0, s \neq 0} \frac{\varphi(P + sv) - \varphi(P)}{s}$$

existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *die Ableitung von φ in P in Richtung v*. Er wird mit

$$(D_v \varphi)_P$$

bezeichnet.

Die Existenz von $(D_v\varphi)_P$ hängt nur von der Abbildung $\mathbb{K} \supseteq U(0,\delta) \to W$, $s \mapsto \varphi(P+sv)$, ab (wobei das Intervall $U(0,\delta)$ (im reellen Fall) bzw. der offene Ball (im komplexen Fall) so gewählt ist, dass $s \in U(0,\delta)$ auch $P+sv \in G$ impliziert. D.h. dass $U(P,\delta) \subseteq G$ gilt). Die Richtungsableitung in einem Punkt und in eine Richtung ist selbst ein Vektor in W. Bei $W = \mathbb{K}$ ist die Richtungsableitung eine reelle oder komplexe Zahl.

Beispiel 42.2. Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto x^2y,$$

in einem Punkt $P = (a_1,a_2)$ in Richtung $v = (v_1,v_2)$. Der Differenzenquotient ist

$$\begin{aligned}
&\frac{f(P+sv)-f(P)}{s}\\
=&\frac{f((a_1+sv_1,a_2+sv_2))-f((a_1,a_2))}{s}\\
=&\frac{f((a_1+sv_1,a_2+sv_2))-f((a_1,a_2))}{s}\\
=&\frac{a_1^2a_2+2sa_1a_2v_1+s^2a_2v_1^2+sa_1^2v_2+2s^2a_1v_1v_2+s^3v_1^2v_2-a_1^2a_2}{s}\\
=&2a_1a_2v_1+a_1^2v_2+s(a_2v_1^2+2a_1v_1v_2)+s^2(v_1^2v_2).
\end{aligned}$$

Für $s \to 0$ gehen die beiden hinteren Summanden gegen 0, so dass sich insgesamt

$$\lim_{s\to 0}\frac{f(P+sv)-f(P)}{s} = 2a_1a_2v_1+a_1^2v_2$$

ergibt.

Im Punkt $P = (2,5)$ ergibt sich in Richtung $v = (1,-3)$ beispielsweise die Richtungsableitung

$$2\cdot 2\cdot 5\cdot 1+2^2\cdot(-3) = 8.$$

Beispiel 42.3. Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei

$$L : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann existiert die Richtungsableitung in jedem Punkt $P \in V$ und in jede Richtung $v \in V$, und zwar ist

$$(D_vL)_P = L(v),$$

insbesondere ist also die Richtungsableitung unabhängig vom Punkt. Dies folgt direkt durch Betrachten des Differenzenquotienten; es ist nämlich

$$\frac{L(P+sv)-L(P)}{s} = \frac{L(P)+sL(v)-L(P)}{s} = \frac{sL(v)}{s} = L(v).$$

Daher ist auch der Limes für $s \to 0$ gleich $L(v)$.

Lemma 42.4. *Seien V und W euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und seien*

$$f, g : G \longrightarrow W$$

Abbildungen, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar seien. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Summe $f + g$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung v mit*
$$(D_v(f + g))_P = (D_v f)_P + (D_v g)_P \, .$$
(2) *Das Produkt af mit $a \in \mathbb{K}$ ist ebenfalls differenzierbar in Richtung v mit*
$$(D_v(af))_P = a(D_v f)_P \, .$$
(3) *Die Funktion f ist auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{K}$ differenzierbar und es gilt $(D_{cv} f)_P = c(D_v f)_P$.*

Beweis. Die Eigenschaften (1) und (2) ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften für Limiten von Abbildungen, siehe Lemma 23.6. Die Eigenschaft (3) folgt aus Aufgabe 42.13. □

Im Rahmen der Theorie des totalen Differentials wird die Frage beantwortet, wie sich die Richtungsableitungen zu verschiedenen Richtungen zueinander verhalten. Wenn im Werteraum eine Basis gegeben ist, so kann man die Richtungsableitung komponentenweise bestimmen.

Lemma 42.5. *Seien V und W euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei $v \in V$ ein Vektor. Es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Es sei W der Produktraum*
$$W = W_1 \times \cdots \times W_k$$
aus euklidischen Vektorräumen $W_1, \ldots, W_k$ (versehen mit dem Produkt der einzelnen Skalarprodukte). Dann ist φ genau dann in P differenzierbar in Richtung v, wenn sämtliche Komponentenabbildungen
$$\varphi_i : G \longrightarrow W_i$$
in P in Richtung v differenzierbar sind. In diesem Fall gilt
$$(D_v \varphi)_P = ((D_v \varphi_1)_P, \ldots, (D_v \varphi_k)_P)$$
(2) *Es sei $w_1, \ldots, w_n$ eine Basis von W mit den Koordinaten*
$$y_j : W \longrightarrow \mathbb{K}.$$
Dann ist φ in P in Richtung v genau dann differenzierbar, wenn sämtliche Komponentenfunktionen
$$f_j = y_j \circ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$$

in P in Richtung v differenzierbar sind. In diesem Fall ist

$$(D_v\varphi)_P = ((D_v f_1)_P, \ldots, (D_v f_n)_P)\,.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der zweiten, wenn man für die einzelnen Vektorräume W_j Basen einführt (umgekehrt ist auch der zweite Teil ein Spezialfall des ersten). Die zweite Aussage folgt aus allgemeinen Limeseigenschaften oder aus Lemma 40.4 in Verbindung mit Aufgabe 42.3. □

Aufgrund von diesem Lemma muss man vor allem die Richtungssableitung für den Fall verstehen, wo der Wertebereich gleich $\mathbb{K}$ ist.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass durchaus alle Richtungsableitungen existieren können, die Abbildung selbst aber noch nicht einmal stetig sein muss.

Beispiel 42.6. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} \text{ für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Für einen Vektor $v \neq 0$, $v = (a,b)$, und einen reellen Parameter s erhalten wir auf dem linearen Unterraum $\mathbb{R}v$ die Funktion

$$f_v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ s \longmapsto f(sa, sb) = \frac{sas^3b^3}{s^2a^2 + s^6b^6} = \frac{s^2ab^3}{a^2 + s^4b^6}.$$

Für $a \neq 0$ ist der Nenner stets positiv und die Funktion f_v ist stetig mit dem Wert 0 bei $s = 0$, und differenzierbar. Für $a = 0$ ist die Funktion f_v konstant $= 0$ und damit ebenfalls differenzierbar. Also existieren in 0 alle Richtungsableitungen. Die Funktion ist allerdings nicht stetig: Für die Folge $(1/m^3, 1/m)$ (die gegen $0 = (0,0)$ konvergiert) gilt

$$f(1/m^3, 1/m) = \frac{(1/m^3)(1/m^3)}{(1/m^6) + (1/m^6)} = \frac{1}{2}\,,$$

aber $f(0,0) = 0$.

Im Allgemeinen möchte man nicht nur in einem einzigen Punkt $P \in V$ ableiten können, sondern in jedem Punkt, was durch die folgende naheliegende Definition präzisiert wird.

Definition 42.7. Seien V und W euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, sei $\varphi : G \to W$ eine Abbildung und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Dann heißt φ *differenzierbar in Richtung* v, falls φ in jedem Punkt $P \in G$ in Richtung v differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$D_v\varphi : G \longrightarrow W,\ P \longmapsto (D_v\varphi)_P,$$

die *Richtungsableitung* von φ in Richtung v.

Die Richtungsableitung zu einem fixierten Vektor ist also vom selben Typ wie die Ausgangsabbildung.

42.2. **Polynomiale Funktionen.**

Wir haben schon Polynome in ein und in zwei Variablen verwendet. Die folgende Definition verwendet Multiindex-Schreibweise, um Polynomfunktionen in beliebig (endlich) vielen Variablen einzuführen. Dabei steht ein Index ν für ein Tupel

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$$

und für Variablen $x_1, \ldots, x_n$ verwendet man die Schreibweise

$$x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} .$$

Definition 42.8. Eine Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

die man als eine endliche Summe der Form

$$f(x_1, \ldots, x_n) \; = \; \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x^\nu \; = \; \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \cdots x_n^{\nu_n}$$

mit $a_\nu \in \mathbb{K}$ schreiben kann, heißt *polynomiale Funktion*.

Offenbar sind due Summe und die Produkte von polynomialen Funktionen wieder polynomial. Dies gilt auch, wenn man Polynome in andere Polynome einsetzt.

Beispiel 42.9. Wir betrachten die polynomiale Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1 \cdots x_n.$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = (v_1, \ldots, v_n)$ in einem beliebigen Punkt $P = (x_1, \ldots, x_n)$ ergibt sich durch Betrachten des Differenzenquotienten, also

$$\begin{aligned} & \frac{(x_1 + sv_1) \cdot (x + sv_2) \cdots (x_n + sv_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ = & \frac{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n + s(\sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}) + s^2 g(s, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) - x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}{s} \\ = & \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i} + s \cdot g(s, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n). \end{aligned}$$

$g(s, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ eine polynomiale Funktion in s (die $x_1, \ldots, x_n$ und die $v_1, \ldots, v_n$ sind fixierte Zahlen). Der Limes von $s \cdot g(s, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n)$ geht für $s \to 0$ gegen 0. Daher ist

$$(D_v f)_P \; = \; \sum_{i=1}^n v_i \frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}.$$

In den Aufgaben werden wir sehen, dass die Richtungsableitnug zu einer polynomialen Funktion in jede Richtung existiert und selbst wieder polynomial ist. Dies wird sich auch einfach im Rahmen des totalen Differentials ergeben.

43. Partielle Richtungsableitung

43.1. **Partielle Ableitungen.**

Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine durch

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index i die übrigen Variablen x_j, $j \neq i$, als Konstanten, so erhält man eine Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die nur von x_i abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in einer Variablen, differenzierbar ist, so sagen wir, dass f *partiell differenzierbar* bezüglich x_i ist und bezeichnen diese Ableitung mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Definition 43.1. Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung $\varphi : G \to \mathbb{K}^m$ durch

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

gegeben. Es sei $P = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ ein Punkt. Für fixierte Indizes i und j betrachten wir die Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{K},\ x_i \longmapsto f_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

(wobei I ein Intervall (bzw. eine offene Umgebung)mit $a_i \in I$ sei derart, dass $\{(a_1, \ldots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \ldots, a_n)\} \subseteq G$ gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen a_k, $k \neq i$, fixiert seien. Ist diese Funktion in P differenzierbar, so heißt f_j *partiell differenzierbar* in P bezüglich der Koordinate x_i. Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in $\mathbb{K}$ ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die i-te *partielle Ableitung* von f_j in P.

Die Abbildung φ heißt *partiell differenzierbar* im Punkt P, falls für alle i und j die partiellen Ableitungen in P existieren. Die i-te partielle Ableitung von φ in P wird mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(P) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P))$$

bezeichnet.

Diese Definition führt die i-te partielle Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die

Existenz der i-ten partiellen Ableitung von f im Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + s, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{s} .$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren. Insbesondere machen partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein $\mathbb{K}^n$ betrachtet wird.

Lemma 43.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

eine Abbildung. Dann ist φ genau dann partiell differenzierbar in P, wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen f_j in P in Richtung eines jeden Einheitsvektors existieren. In diesem Fall stimmt die i-te partielle Ableitung $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$ von φ in P mit der Richtungsableitung von f_j in P in Richtung des i-ten Einheitsvektors e_i überein,

Beweis.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \\ &= \lim_{s \to 0, s \neq 0} \frac{f_j(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+s,a_{i+1},\ldots,a_n) - f_j(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0, s \neq 0} \frac{f_j((a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n) + s(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)) - f_j(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{s}. \end{aligned}$$

□

Definition 43.3. Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

gegeben. Dann heißt φ *partiell differenzierbar*, wenn φ in jedem Punkt $P \in G$ partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ P \longmapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(P) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P)),$$

die i-te *partielle Ableitung* von φ.

Definition 43.4. Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

gegeben, die partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\mathrm{Jak}(\varphi)_P = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu φ im Punkt $P \in G$.

Beispiel 43.5. Wir betrachten die Abbildung $\mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, die durch

$$(x, y, z) \longmapsto (xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z) = (f_1, f_2)$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von f_1 sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2, \ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy, \ \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2 \,,$$

und die partiellen Ableitungen von f_2 sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y \cos(xy) + 2x \cdot \exp z, \ \frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cdot \cos(xy)\,, \ \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2 \cdot \exp(z)\,.$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt $P = (x, y, z)$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y\cos(xy) + 2x\exp(z) & x\cos(xy) & x^2\exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B. $P = (2, 1, 3)$, setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4\exp(3) & 2\cos(2) & 4\exp(3) \end{pmatrix}.$$

43.2. **Höhere Richtungsableitungen.**

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung $\varphi : G \to W$ und einen fixierten Vektor $v \in V$ ist die Richtungsableitung in Richtung v (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v\varphi : G \longrightarrow W, \ P \longmapsto (D_v\varphi)_P.$$

Als solche macht es Sinn zu fragen, ob $D_v\varphi$ in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen.* Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

Definition 43.6. Es seien V und W euklidische Vektorräume,

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung und $v_1, \dots, v_n$ Vektoren in V. Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von φ in Richtung $v_1, \dots, v_n$ existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung $v_1, \dots, v_{n-1}$ existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung v_n existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi))$$

bezeichnet.

Definition 43.7. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Man sagt, dass φ n-mal *stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl $v_1, \ldots, v_n$ von n Vektoren aus V die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi))$$

in Richtung $v_1, \ldots, v_n$ existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung $D_v\varphi$ in jede Richtung $v \in V$ existiert und stetig ist.

43.3. **Der Satz von Schwarz.**

Der folgende Satz heißt *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*).

Satz 43.8. *Sei $G \subseteq V$ offen und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung, so dass für $u, v \in V$ die zweiten Richtungsableitungen $D_vD_u\varphi$ und $D_uD_v\varphi$ existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_vD_u\varphi = D_uD_v\varphi\,.$$

Beweis. Durch Betrachten der einzelnen Komponenten von φ bzgl. einer Basis von W können wir annehmen, dass $W = \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist. Wir wollen den eindimensionalen Mittelwertsatz anwenden. Sei $P \in G$ ein fixierter Punkt. Wir betrachten die Abbildung $(s,t) \mapsto \varphi(P + su + tv)$ und studieren diese für hinreichend kleine s und t. Wir fixieren diese (für den Moment) und betrachten die Abbildung

$$\sigma \longmapsto \varphi(P + \sigma u + tv) - \varphi(P + \sigma u)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $s_1 \in]0, s[$ mit

$$\varphi(P{+}su{+}tv){-}\varphi(P{+}su){-}\varphi(P{+}tv){+}\varphi(P) \;=\; s{\cdot}((D_u\varphi)_{P+s_1u+tv}{-}(D_u\varphi)_{P+s_1u}).$$

Nun wenden wir erneut den Mittelwertsatz auf die Abbildung

$$\tau \longmapsto (D_u\varphi)_{P+s_1u+\tau v}$$

an, und erhalten die Existenz eines $t_1 \leq t$ mit

$$(D_u\varphi)_{P+s_1u+tv} - (D_u\varphi)_{P+s_1u} \;=\; t \cdot (D_vD_u\varphi)_{P+s_1u+t_1v}.$$

Zusammen erhalten wir

$$\varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P) = st \cdot (D_vD_u\varphi)_{P+s_1u+t_1v}\,.$$

Wenden wir denselben Trick in umgekehrter Reihenfolge an, so erhalten wir s_2 und t_2, so dass dieser Ausdruck auch gleich

$$st \cdot (D_uD_v\varphi)_{P+s_2u+t_2v}$$

ist. Somit schliessen wir für (hinreichend kleine) gegebene $s, t \neq 0$, dass $s_1, s_2 \leq s$ und $t_1, t_2 \leq t$ existieren mit

$$(D_vD_u\varphi)_{P+s_1u+t_1v} = (D_uD_v\varphi)_{P+s_2u+t_2v}\,.$$

Für $s \to 0$ und $t \to 0$ konvergieren auch s_1, s_2, t_1 und t_2 gegen 0. Die Stetigkeit der beiden zweiten Richtungsableitungen impliziert für $s, t \to 0$ die Gleichheit

$$(D_v D_u \varphi)_P = (D_u D_v \varphi)_P \,.$$

□

Korollar 43.9. *Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Dann gilt für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) \;=\; D_{v_{\sigma(n)}}(...D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 43.9. □

44. Totale Differenzierbarkeit

44.1. **Totale Differenzierbarkeit.**

Wir möchten Abbildungen $\varphi : V \to W$ zwischen Vektorräumen differenzieren, und allgemeiner Abbildungen

$$\varphi : G \longrightarrow W,$$

wobei $G \subseteq V$ eine gewisse offene Teilmenge ist. Wir wiederholen kurz die Situation in einer Variablen: angenommen wir haben eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann ist die Grundidee einer differenzierbaren Abbildung und ihrer Ableitung eine „Tangente an den Graphen“ anzulegen. Dabei kann man sagen, dass die Tangente die beste *lineare Approximation* von φ (genauer: der Graph einer affin-linearen Approximation) in einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}$ darstellt. Da die Steigung der Tangente wieder eine reelle Zahl ist, wird beim Differenzieren jedem Punkt x wieder eine Zahl zugeordnet. Wir erhalten also eine neue Funktion, welche wir mit φ' bezeichnen. Im höherdimensionalen Fall ist dies komplizierter, aber die Idee einer bestmöglichen *linearen Approximation* bleibt bestehen.

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle Vektorräume endlichdimensional und mit einer euklidischen Norm versehen sind. Wie in der 40. Vorlesung gezeigt wurde, hängt die Topologie, also die Konzepte offene Menge, Stetigkeit, Konvergenz, nicht von der gewählten euklidischen Struktur ab. Bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ statten wir den zugrunde liegenden reellen Vektorraum mit einer euklidischen Struktur aus.

Definition 44.1. Sei $G \subseteq V$ eine offene Menge in einem endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $\varphi : G \to W$ eine Abbildung. Dann heißt φ *differenzierbar* (oder *total differenzierbar*) im Punkt $P \in G$, wenn es eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $L : V \to W$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \,||\, v \,||\, r(v)$$

gibt, wobei $r : U(0, \delta) \to W$ eine in 0 stetige Abbildung mit $r(0) = 0$ ist und die Gleichung für alle $v \in V$ mit $P + v \in U(P, \delta) \subseteq G$ gilt.

Diese lineare Abbildung heißt, falls sie existiert, das *(totale) Differential* von φ an der Stelle P und wird mit

$$(D\varphi)_P$$

bezeichnet.

Äquivalent zur totalen Differenzierbarkeit ist die Eigenschaft, dass der Ausdruck

$$r(v) = \frac{\varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v)}{\| v \|}$$

für $v \to 0$ gegen 0 konvergiert. Ebenfalls äquivalent ist die Eigenschaft, dass der Limes (von Funktionen)

$$\lim_{v \to 0, v \neq 0} \frac{\| \varphi(P + v) - \varphi(P) - L(v) \|}{\| v \|}$$

existiert und gleich 0 ist.

Das Konzept der totalen Differenzierbarkeit ist eher theoretisch und weniger konkreten Berechnungen zugänglich. Wir werden später dieses Konzept mit dem Konzept der partiellen Ableitungen in Verbindung bringen, welches eher für Berechnungen geeignet ist, jedoch von Koordinaten, d.h. von der Auswahl einer Basis, abhängt (siehe auch Beispiel 44.8 weiter unten).

Lemma 44.2. *Seien V und W endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei die Abbildung $\varphi : G \to W$ auf einer offenen Teilmenge $G \subseteq V$ definiert. Sei $P \in G$ ein Punkt. Dann existiert höchstens eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften aus Definition. Ist φ im Punkt P differenzierbar, so ist das totale Differential $(D\varphi)_P$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen, es gelte $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_1(v) + \| v \| \cdot r_1(v)$ und $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L_2(v) + \| v \| \cdot r_2(v)$ mit zwei linearen Abbildungen L_1 und zwei L_2 und im Punkt 0 stetigen Funktionen $r_1, r_2 : U(0, \delta) \to W$ mit $r_1(0) = r_2(0) = 0$. Wir müssen $L_1 = L_2$ zeigen. Dazu ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab (da es sich hier um Gleichungen von Funktionswerten im Vektorraum W handelt, ist hier werteweises Abziehen gemeint) und erhalten die Gleichung

$$0 = (L_1 - L_2)(v) + \| v \| \cdot (r_1(v) - r_2(v)) \, .$$

Daher müssen wir zeigen, dass die (konstante) Nullabbildung die Eigenschaft besitzt, dass die lineare Abbildung 0 ihre einzige lineare Approximation ist. Wir nehmen daher an, dass

$$0 = L(v) + \| v \| \cdot r(v)$$

gilt, wobei L linear und r eine in 0 stetige Funktion ist mit $r(0) = 0$. Wenn L nicht die Nullabbildung ist, so gibt es einen Vektor $v \in V$ mit $L(v) = w \neq 0$. Dann gilt für $s \in \mathbb{K}$

$$0 = L(sv) + \| sv \| \, r(sv) = sw + |s| \cdot \| v \| \cdot r(sv) \, .$$

Dies impliziert, dass $r(sv) = -sw/(|s| \cdot \| v \|)$ für $s \neq 0$ gilt. Die Norm von $r(sv)$ ist daher konstant gleich $\| w \| \, / \, \| v \| \neq 0$. Also gilt $\lim_{s \to 0} \| r(sv) \| \neq 0$, ein Widerspruch. $\square$

Proposition 44.3. *Sei $L : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist L in jedem Punkt $P \in V$ differenzierbar und stimmt in jedem Punkt mit ihrem totalen Differential überein.*

Beweis. Aufgrund der Linearität gilt

$$L(P + v) = L(P) + L(v) \, .$$

Also können wir $r = 0$ wählen. $\square$

Beispiel 44.4. Ist $\varphi : V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$, so ist φ differenzierbar mit totalem Differential 0 (siehe Aufgabe 44.1).

Proposition 44.5. *Es seien V und W endlichdimensionale normierte $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildungen mit den Differentialen $(D\varphi_1)_P$ und $(D\varphi_2)_P$. Dann ist auch $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ in P differenzierbar und es gilt*

$$(D(\varphi_1 + \varphi_2))_P = (D\varphi_1)_P + (D\varphi_2)_P \, .$$

Ebenso gilt $(D(a\varphi_1))_P = a(D\varphi_1)_P$.

Beweis. Sei $\varphi_1(P + v) = \varphi_1(P) + L_1(v) + \| v \| \cdot r_1(v)$ und $\varphi_2(P + v) = \varphi_2(P) + L_2(v) + \| v \| \cdot r_2(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\varphi_1 + \varphi_2)(P + v) &= \varphi_1(P + v) + \varphi_2(P + v) \\ &= \varphi_1(P) + L_1(v) + \| v \| \cdot r_1(v) + \varphi_2(P) + L_2(v) + \| v \| \cdot r_2(v) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(P) + (L_1 + L_2)(v) + \| v \| \, (r_1(v) + r_2(v)).\end{aligned}$$

Wir erhalten also die gewünschte Gestalt, da auch $r_1 + r_2$ in 0 stetig ist mit $(r_1 + r_2)(0) = 0$. Der Beweis der zweiten Aussage ist ähnlich. $\square$

Proposition 44.6. *Es seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Sei $\varphi : G \to W$ eine in $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ auch stetig im Punkt P.*

Beweis. Nach Definition gilt $\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \| v \| \cdot r(v)$. Die rechte Seite ist stetig (nach Definition und Satz 20.11) in $v = 0$. Damit ist φ stetig in P. $\square$

44.2. **Die Kettenregel.**

Die Eleganz des totalen Differentials wird in der folgenden allgemeinen Version der Kettenregel deutlich.

Satz 44.7. *Seien V, W und U $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ und $D \subseteq W$ offene Mengen, und $\varphi : G \to W$ und $\psi : D \to U$ Abbildungen derart, dass $\varphi(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass φ in $P \in G$ und ψ in $\varphi(P) \in D$ differenzierbar ist. Dann ist $\psi \circ \varphi : G \to U$ in P differenzierbar mit dem totalen Differential*

$$(D(\psi \circ \varphi))_P = (D\psi)_{\varphi(P)} \circ (D\varphi)_P\,.$$

Beweis. Wir haben nach Voraussetzung (wobei wir $Q := \varphi(P)$ setzen)

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + L(v) + \| v \|\, r(v)$$

und

$$\psi(Q + w) = \psi(Q) + M(w) + \| w \|\, s(w)$$

mit linearen Abbildungen $L : V \to W$ und $M : W \to U$, und mit in 0 stetigen Funktionen $r : U(0, \delta) \to W$ und $s : U(0, \delta') \to U$ (beachte, dass $U(P, \delta) \subseteq V$ und $U(Q, \delta') \subseteq W$ gilt), die beide in 0 den Wert 0 annehmen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
& (\psi \circ \varphi)(P + v) \\
= \; & \psi(\varphi(P + v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P) + L(v) + \| v \|\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + M(L(v) + \| v \|\, r(v)) \\
& + \| L(v) + \| v \|\, r(v) \|\, s(L(v) + \| v \|\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + M(L(v)) + M(\| v \|\, r(v)) \\
& + \| L(v) + \| v \|\, r(v) \|\, s(L(v) + \| v \|\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) + \| v \|\, M(r(v)) + \\
& \| (\| v \|\, L(\frac{v}{\| v \|}) + \| v \|\, r(v)) \|\, s(L(v) + \| v \|\, r(v)) \\
= \; & \psi(\varphi(P)) + (M \circ L)(v) \\
& + \| v \| \left(M(r(v)) + \| L(\frac{v}{\| v \|}) + r(v) \|\, s(L(v) + r(v)) \right).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir in der dritten Gleichung die lineare Approximation für $w = L(v) + \| v \|\, r(v)$ eingesetzt. Die beiden letzten Gleichungen gelten nur für $v \neq 0$. Der Ausdruck

$$t(v) := M(r(v)) + \| L(\frac{v}{\| v \|}) + r(v) \|\, s(L(v) + r(v))$$

ist unser Kandidat für die Abweichungsfunktion. Der erste Summand $M(r(v))$ ist in $v = 0$ stetig und hat dort auch den Wert 0. Es genügt also den zweiten Summanden zu betrachten. Der $\| - \|$-Ausdruck ist in einer Umgebung der Null beschränkt, da L auf der kompakten Einheitssphäre beschränkt ist und da r in 0 stetig ist. Daher hängt die Stetigkeit nur von dem rechten Faktor ab. Aber $L(v) + r(v)$ hat für $v \to 0$ den Grenzwert 0. Damit ist auch $s(L(v) + r(v))$ in 0 stetig und hat dort den Grenzwert 0. $\square$

Das folgende Beispiel illustriert, dass das totale Differential unabhängig von der Wahl einer Basis ist, die partiellen Ableitungen aber nicht.

Beispiel 44.8. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$, die durch

$$(x, y, z) \longmapsto 2xy^2 + x^2z^3 + z^2$$

gegeben sei. Es ist leicht die partiellen Ableitungen in jedem Punkt zu berechnen, nämlich:

$$(\partial f/\partial x,\, \partial f/\partial y,\, \partial f/\partial z)_{(x,y,z)} = (2y^2 + 2xz^3,\, 4xy,\, 3x^2z^2 + 2z)\,.$$

Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, dass diese Abbildung in jedem Punkt total differenzierbar ist, und dass die Jacobi-Matrix das totale Differential beschreibt.

Nehmen wir nun an, dass wir nur an der Restriktion dieser Funktion auf die Ebene

$$E \subset \mathbb{K}^3,\; E = \{(x, y, z) :\; 3x + 2y - 5z = 0\}$$

interessiert sind. E ist also der Kern der linearen Abbildung

$$L : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K},\; (x, y, z) \longmapsto 3x + 2y - 5z.$$

Als Kern ist E selbst ein (zweidimensionaler) Vektorraum. Die Einschränkung von f auf die Ebene ergibt also die Abbildung

$$\tilde{f} = f|_E : E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Diese Abbildung kann man als die Komposition $E \subset \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ auffassen und diese ist nach der Fakt differenzierbar. Wenn wir die Inklusion von E in $\mathbb{K}^3$ mit N bezeichnen, so ist das totale Differential der Komposition in einem Punkt $P \in E$ gemäß der Kettenregel gerade die Abbildung

$$(D\tilde{f})_P = (Df)_P \circ N : E \longrightarrow \mathbb{K}.$$

Daher macht es hier Sinn vom totalen Differential zu sprechen.

Es macht allerdings keinen Sinn von partiellen Ableitungen der Abbildung $f|_E : E \to \mathbb{K}$ zu sprechen, da es keine natürliche Basis auf E gibt und daher auch keine natürlichen Koordinaten. Es ist leicht eine Basis von E zu finden und damit Koordinaten, es gibt aber keine „beste Wahl", und die partiellen Ableitungen sehen in jeder Basis verschieden aus.

Eine Basis von E ist bspw. gegeben durch $v_1 = (0, 5, 2)$ und $v_2 = (5, 0, 3)$, und eine weitere durch $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$. Mit solchen Basen erhalten wir Identifikationen $\mathbb{K}^2 \to E$ und somit eine numerische Beschreibung der Abbildung $\mathbb{K}^2 \cong E \to \mathbb{K}$, womit wir die partiellen Ableitungen bzgl. der gewählten Basen berechnen können.

In der ersten Basis ist die Identifikation gegeben durch die Abbildung

$$(s, t) \longmapsto sv_1 + tv_2 = s(0, 5, 2) + t(5, 0, 3) = (5t, 5s, 2s + 3t)$$

und dieser Ausdruck wird durch f abgebildet auf

$$2(5t)(5s)^2 + (5t)^2(2s + 3t)^3 + (2s + 3t)^2$$

$$\begin{aligned} &= 250ts^2 + 25t^2(8s^3 + 36s^2t + 54st^2 + 27t^3) + 4s^2 + 9t^2 + 12st \\ &= 250ts^2 + 200s^3t^2 + 900s^2t^3 + 1350st^4 + 675t^5 + 4s^2 + 9t^2 + 12st. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen dieser Komposition (nennen wir sie g) bezüglich dieser Basis sind gegeben durch

$$\partial g/\partial s = 500ts + 600s^2t^2 + 1800st^3 + 1350t^4 + 8s + 12t$$

und

$$\partial g/\partial t = 250s^2 + 400s^3t + 2700s^2t^2 + 5400st^3 + 3375t^4 + 18t + 12s\,.$$

In der zweiten Basis $w_1 = (1, 1, 1)$ und $w_2 = (2, -3, 0)$ ist die Identifikation gegeben durch

$$(r, u) \longmapsto rw_1 + uw_2 = r(1, 1, 1) + u(2, -3, 0) = (r + 2u, r - 3u, r)$$

und dieser Ausdruck wird unter f abgebildet auf

$$\begin{aligned} &\ 2(r + 2u)(r - 3u)^2 + (r + 2u)^2r^3 + r^2 \\ &= 2r^3 + 4r^2u - 12r^2u - 24ru^2 + 18ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u + 4r^3u^2 + r^2 \\ &= 2r^3 - 8r^2u - 6ru^2 + 36u^3 + r^5 + 4r^4u + 4r^3u^2 + r^2. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen der Komposition (nennen wir sie h) bezüglich dieser Basis sind

$$\partial h/\partial r = 6r^2 - 16ru - 6u^2 + 5r^4 + 16r^3u + 12r^2u^2 + 2r$$

und

$$\partial h/\partial u = -8r^2 - 12ru + 108u^2 + 4r^4 + 8r^3u\,.$$

Fazit: Koordinaten sind gut für Berechnungen aber schlecht für die Mathematik.

45. Totale Differenzierbarkeit II

45.1. **Totale Differenzierbarkeit und partielle Ableitungen.**

Im Folgenden wollen wir den Zusammenhang zwischen Richtungsableitungen, partiellen Ableitungen und dem totalen Differential verstehen.

Totale Differenzierbarkeit impliziert richtungsweise Differenzierbarkeit.

Proposition 45.1. *Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $\varphi : G \to W$ eine im Punkt $P \in G$ differenzierbare Abbildung. Dann ist φ in P in jede Richtung v differenzierbar, und es gilt*

$$(D_v\varphi)(P) = (D\varphi)_P(v)\,.$$

Beweis. Da $(D\varphi)_P$ eine lineare Abbildung von V nach W ist, liefert die Anwendung dieser Abbildung auf einen Vektor $v \in V$ einen Vektor in $(D\varphi)_P(v) \in W$. Nach Voraussetzung haben wir

$$\varphi(P + v) = \varphi(P) + (D\varphi)_P(v) + \|v\| \cdot r(v)$$

(mit den üblichen Bedingungen an r). Insbesondere gilt für (hinreichend kleines) $s \in \mathbb{K}$

$$\varphi(P+sv) = \varphi(P) + s(D\varphi)_P(v) + |\,s\,| \cdot ||\,v\,|| \cdot r(sv)\,.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{\varphi(P+sv)-\varphi(P)}{s} &= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{s(D\varphi)_P(v) + |\,s\,| \cdot ||\,v\,|| \cdot r(sv)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \left((D\varphi)_P(v) + \frac{|\,s\,|}{s} ||\,v\,|| \cdot r(sv) \right) \\
&= (D\varphi)_P(v),
\end{aligned}$$

da $\lim_{s\to 0} r(sv) = 0$ und der Ausdruck $\frac{|s|}{s} ||\,v\,||$ beschränkt ist. □

Vor dem Beweis der nächsten Aussage erinnern wir an den Mittelwertsatz für Kurven: Sei $h : [a, b] \to \mathbb{K}^n$ differenzierbar. Dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit

$$||\,h(b) - h(a)\,|| \leq (b-a)\, ||\,h'(c)\,||\ .$$

Satz 45.2. *Sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und $\varphi : G \to \mathbb{K}^m$ eine Abbildung. Seien x_i, $i = 1, \ldots, n$, die Koordinaten von $\mathbb{K}^n$ und $P \in G$ ein Punkt. Es sei angenommen, dass alle partiellen Ableitungen in einer offenen Umgebung von P existieren und in P stetig sind. Dann ist φ in P (total) differenzierbar. Ist die Abbildung φ bezüglich einer Basis des $\mathbb{K}^m$ durch die Koordinatenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$ gegeben, so wird unter diesen Bedingungen das totale Differential in P durch die Jacobi-Matrix*

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P) \right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$$

beschrieben.

Beweis. Indem wir G durch eine eventuell kleinere offene Umgebung von P ersetzen, können wir annehmen, dass auf G die Richtungsableitungen

$$Q \longmapsto (D_i\varphi)(Q) := (D_{e_i}\varphi)(Q) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(Q), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(Q)) \in \mathbb{K}^m$$

existieren und in P stetig sind. Daher ist nach Proposition 45.1 die lineare Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ v = (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i (D_i\varphi)(P),$$

der einzige Kandidat für das totale Differential. Daher müssen wir zeigen, dass diese lineare Abbildung die definierenden Eigenschaft des totalen Differentials besitzt. Setze $P_i = P + v_1e_1 + \ldots + v_ie_i$ (abhängig von v). Dann gelten mit dem Ansatz

$$r(v) \ = \ \frac{\varphi(P+v) - \varphi(P) - \sum_{i=1}^{n} v_i(D_i(\varphi))(P)}{||\,v\,||}$$

(für v hinreichend klein) die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|r(v)\| &= \frac{\|\varphi(P+v)-\varphi(P)-\sum_{i=1}^n v_i(D_i(\varphi))(P)\|}{\|v\|} \\
&= \frac{\|\sum_{i=1}^n(\varphi(P_i)-\varphi(P_{i-1})-v_i(D_i(\varphi))(P))\|}{\|v\|} \\
&\leq \sum_{i=1}^n \frac{\|\varphi(P_i)-\varphi(P_{i-1})-v_i(D_i(\varphi))(P)\|}{\|v\|} \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\|\varphi(P_{i-1}+v_ie_i)-\varphi(P_{i-1})-v_i(D_i(\varphi))(P)\|}{\|v\|}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten jeden Summanden einzeln. Für fixiertes i ist die Abbildung (die auf dem Einheitsintervall definiert ist)

$$h_i : s \longmapsto \varphi(P_{i-1}+sv_ie_i)-sv_i(D_i(\varphi))(P)$$

differenzierbar (aufgrund der Existenz der partiellen Ableitungen auf G) mit dem Differential

$$s \longmapsto v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1}+sv_ie_i)-v_i(D_i(\varphi))(P)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz existiert eine reelle Zahl $0 \leq c_i \leq 1$, so dass (dies ist die Norm von $h_i(1)-h_i(0)$)

$$\begin{aligned}
& \|\varphi(P_{i-1}+v_ie_i)-\varphi(P_{i-1})-v_i(D_i(\varphi))(P)\| \\
\leq\ & \|v_i(D_i(\varphi))(P_{i-1}+c_iv_ie_i)-v_i(D_i(\varphi))(P)\| \\
=\ & |v_i|\cdot\|(D_i(\varphi))(P_{i-1}+c_iv_ie_i)-(D_i(\varphi))(P)\| \\
\leq\ & \|v\|\cdot\|(D_i(\varphi))(P_{i-1}+c_iv_ie_i)-(D_i(\varphi))(P)\|
\end{aligned}$$

gilt. Aufsummieren liefert also, dass unser Ausdruck $\| r(v) \|$ nach oben beschränkt ist durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{\|v\|\cdot\|(D_i(\varphi))(P_{i-1}+c_iv_ie_i)-(D_i(\varphi))(P)\|}{\|v\|} \\
\leq\ & n\cdot\sum_{i=1}^n \|(D_i(\varphi))(P_{i-1}+c_iv_ie_i)-(D_i(\varphi))(P)\|\,.
\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen $D_i(\varphi)$ stetig in P sind, wird die Summe rechts mit v beliebig klein. Also ist der Grenzwert für $v \to 0$ gleich 0. □

Korollar 45.3. *Polynomfunktionen sind total differenzierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 44.10 und daraus, dass die partiellen Ableitungen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen und daher stetig sind. □

Zu einer reellwertigen Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

interessieren wir uns wie schon bei einem eindimensionalen Definitionsbereich für die Extrema, also Maxima und Minima, der Funktion, und inwiefern man dies anhand der Ableitungen (falls diese existieren) erkennen kann. Wenn eine solche Funktion total differenzierbar ist, so ist das totale Differential in einem Punkt eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{K}$. Für solche linearen Abbildungen gibt es einen eigenen Namen.

Definition 45.4. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow K$$

heißt auch eine *Linearform* auf V.

Definition 45.5. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt der Homomorphismenraum

$$V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der *Dualraum* zu V.

Wenn $G \subseteq \mathbb{K}^n$ ist, so bilden die partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in G$ eine Matrix mit einer einzigen Zeile, die bei stetigen partiellen Ableitungen das totale Differential repräsentiert. Eine solche Matrix kann man aber ebenso auch als ein n-Tupel in $\mathbb{K}$ und damit als einen Vektor in $\mathbb{K}^n$ auffassen. Dieser Zusammenhang zwischen Vektoren und Linearformen beruht auf dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{K}^n$, und lässt sich konzeptioneller mit Hilfe von Bilinearformen erfassen. Bilinearformen haben wir in Zusammenhang mit multilinearen Abbildungen und Skalarprodukten kennengelernt, sie sind spezielle multilineare Abbildungen.

Definition 45.6. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

K-linear sind.

Eine wichtige Eigenschaft von Bilinearformen, die Skalarprodukte erfüllen, wird in der nächsten Definition formuliert.

Definition 45.7. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$, die induzierten Abbildungen

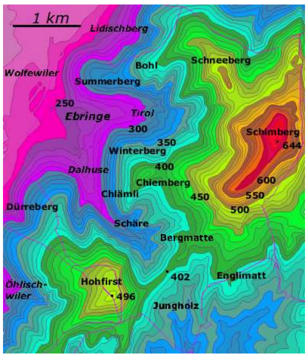
$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

und für alle $w \in V$, $w \neq 0$, die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle v, w\rangle,$$

nicht die Nullabbildung sind.

In der nächsten Vorlesung werden wir für Vektorräume, auf denen eine nichtausgeartete Bilinearform gegeben ist, eine bijektive Beziehung zwischen Vektoren und Linearformen beweisen und damit einen Zusammenhang zwischen dem totalen Differential zu einer Funktion in einem Punkt und einem Vektor, dem sogenannten Gradienten der Funktion in diesem Punkt, herstellen.



In einer topographischen Karte wird ein Gebirge durch seine Niveaulinien (Höhenlinien) repräsentiert.

Definition 45.8. Zu einer Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei G ein metrischer Raum sei, nennt man zu $c \in \mathbb{K}$ die Menge

$$N_c = \{x \in G |\, f(x) = c\}$$

die *Niveaumenge* zu f zum Wert c.

46. Extrema

46.1. **Der Gradient.**

Lemma 46.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, der mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ versehen sei. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Für jeden Vektor $u \in V$ sind die Zuordnungen*

$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle u, v\rangle,$$

und

$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle v, u\rangle,$$

K-linear.

(2) *Die Zuordnung*

$$V \longrightarrow V^*,\, u \longmapsto \langle u, - \rangle,$$

ist K-linear.

(3) *Wenn $\langle -, - \rangle$ nicht ausgeartet ist, so ist die Zuordnung in (2) injektiv. Ist V zusätzlich endlichdimensional, so ist diese Zuordnung bijektiv.*

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Bilinearität. (2). Seien $u_1, u_2 \in V$ und $a_1, a_2 \in K$. Dann ist für jeden Vektor $v \in V$

$$\langle a_1u_1 + a_2u_2, v \rangle \;=\; a_1\langle u_1, v \rangle + a_2\langle u_2, v \rangle,$$

und dies bedeutet gerade die Linearität der Zuordnung. Da die Zuordnung nach (2) linear ist, müssen wir zeigen, dass der Kern davon trivial ist. Sei also $u \in V$ so, dass $\langle u, - \rangle$ die Nullabbildung ist. D.h. $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Dann muss aber nach der Definition von nicht ausgeartet $u = 0$ sein. Wenn V endliche Dimension hat, so liegt eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension vor, und eine solche ist nach Korollar 12.10 bijektiv. $\square$

Wenn es also in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine nicht ausgeartete Bilinearform gibt, bspw. ein Skalarprodukt, so gibt es zu jeder Linearform einen eindeutig bestimmten Vektor, mit dem diese Linearform beschrieben wird. Wendet man dies auf die Linearform an, die durch das totale Differential zu einer differenzierbaren Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ gegeben ist, so gelangt man zum Begriff des Gradienten.

Definition 46.2. Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ offen und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in $P \in G$ differenzierbare Funktion. Dann nennt man den eindeutig bestimmten Vektor $u \in V$ mit

$$(D\varphi)_P(v) \;=\; \langle u, v \rangle$$

für alle $v \in V$ den *Gradienten* von f in P. Er wird mit

$$\operatorname{grad} f(P)$$

bezeichnet.

Man beachte, dass wir durchgehend die endlichdimensionalen Vektorräume mit einem Skalarprodukt versehen, um topologische Grundbegriffe wie Konvergenz und Stetigkeit zur Verfügung zu haben, dass diese Begriffe aber nicht von dem gewählten Skalarprodukt abhängen. Dem entgegen hängt aber der Gradient von dem gewählten Skalarprodukt ab.

Bei $V = \mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, ist der Gradient einfach gleich

$$\operatorname{grad} f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Satz 46.3. *Sei $(V, \langle -,- \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in $P \in G$ differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für jeden Vektor $v \in V$ ist*
$$|\,(Df)_P(v)\,| \leq \|\, v \,\| \cdot \|\operatorname{grad} f(P)\,\| .$$
(2) *Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn v linear abhängig zum Gradienten ist.*
(3) *Sei* $\operatorname{grad} f(P) \neq 0$. *Unter allen Vektoren $v \in V$ mit $\|\, v \,\| = 1$ ist die Richtungsableitung in Richtung des normierten Gradienten maximal, und zwar gleich der Norm des Gradienten.*

Beweis. (1) folgt wegen

$$(Df)_P(v) = \langle v, \operatorname{grad} f(P) \rangle$$

direkt aus der Abschätzung von Cauchy-Schwarz. (2) ergibt sich aus den Zusätzen zur Cauchy Schwarz, siehe Aufgabe 46.14. (3). Aus (1) und (2) folgt, dass

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \operatorname{grad} f(P), \pm\frac{\operatorname{grad} f(P)}{\|\operatorname{grad} f(P)\|} \right\rangle\right| &= \left|(Df)_P\left(\pm\frac{\operatorname{grad} f(P)}{\|\operatorname{grad} f(P)\|}\right)\right| \\ &= \|\operatorname{grad} f(P)\| \end{aligned}$$

gilt, und dass diese beiden Vektoren die einzigen Vektoren der Norm 1 sind, für die diese Gleichung gilt. Wenn man links die Betragstriche weglässt, so gilt die Gleichheit für $\frac{\operatorname{grad} f(P)}{\|\operatorname{grad} f(P)\|}$ nach wie vor, da das Skalarprodukt positiv definit ist. □

Der Gradient gibt demnach die Richtung an, in die die Funktion den stärksten Anstieg hat. In die entgegengesetze Richtung liegt entsprechend der steilste Abstieg vor.

46.2. **Lokale Extrema von Funktionen in mehreren Variablen.**

Wir wollen mit den Mitteln der Differentialrechnung Kriterien erarbeiten, in welchen Punkten eine Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum annimmt. Wenn man sich den Graph einer solchen Funktion als ein Gebirge über der Grundmenge G

vorstellt, so geht es also um die Gipfel und die Senken des Gebirges. Der folgende Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines lokalen Extremums, das das entsprechende Kriterium in einer Variablen verallgemeinert.

Satz 46.4. *Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $P \in G$ ein lokales Extremum besitzt. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in P in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, so ist*

$$(D_v f)(P) = 0.$$

(2) *Wenn f in P total differenzierbar ist, so verschwindet das totale Differential, also*

$$(Df)_P = 0.$$

Beweis. (1) Zu $v \in V$ betrachten wir die Funktion

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei I ein geeignetes reelles Intervall ist. Da die Funktion f in P ein lokales Extremum besitzt, besitzt die Funktion h in $t = 0$ ein lokales Extremum. Nach Voraussetzung ist h differenzierbar und nach Satz 28.1 ist $h'(0) = 0$. Diese Ableitung stimmt aber mit der Richtungsableitung überein, also ist

$$(D_v f)(P) = h'(0) = 0.$$

(2) folgt aus (1) aufgrund von Proposition 45.1. □

Ein lokales Extremum kann also nur in einem sogenannten kritischen Punkt einer Funktion auftreten.

Definition 46.5. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann heißt $P \in G$ ein *kritischer Punkt* von f (oder ein *stationärer Punkt*), wenn

$$(Df)_P = 0$$

ist. Anderfalls spricht man von einem *regulären Punkt*.

Wir sind natürlich auch an hinreichenden Kriterien für das Vorliegen von lokalen Extrema interessiert. Wie schon im eindimensionalen Fall muss man sich die zweiten Ableitungen anschauen, wobei die Situation natürlich dadurch wesentlich verkompliziert wird, dass es zu je zwei Richtungsvektoren v und w eine zweite Richtungsableitung $D_{vw} = D_v D_w$ gibt. Die zweite Richtungsableitung wird dadurch handhabbar, dass man sie in die sogenannte

Hesse-Form bzw. Hesse-Matrix zusammenfasst. Als solche ist sie eine symmetrische Bilinearform, die mit Methoden der linearen Algebra analysiert werden kann. Diese Methoden werden wir im Folgenden entwickeln und insbesondere auf die Hesse-Form anwenden, um schließlich hinreichende Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema zu erhalten.

Definition 46.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zu $P \in G$ heißt die Abbildung

$$\mathrm{Hess}_P\, f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (u, v) \longmapsto D_u D_v f(P),$$

die *Hesse-Form* im Punkt $P \in G$.

Definition 46.7. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei eine Basis v_i, $i = 1, \ldots, n$, von V gegeben mit den zugehörigen Richtungsableitungen $D_i = D_{v_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Zu $P \in G$ heißt dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} D_1 D_1 f(P) & \cdots & D_1 D_n f(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(P) & \cdots & D_n D_n f(P) \end{pmatrix}$$

die *Hesse-Matrix* zu f im Punkt P bzgl. der gegebenen Basis.

Die Hesse-Matrix ist beispielsweise die Gramsche Matrix der Hesse-Form bzgl. der Standardbasis im $\mathbb{R}^n$.

46.3. **Eigenschaften von Bilinearformen.**

Definition 46.8. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bzgl. der Basis.

Lemma 46.9. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bzgl. diesen Basen. Zwischen den Basiselementen gelten die Beziehungen*

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = AGA^t.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} a_{rj} v_j, \sum_{k=1}^{n} a_{sk} v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{rj} a_{sk} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} a_{rj} (\sum_{1 \leq k \leq n} a_{sk} \langle v_j, v_k \rangle) \\ &= (A \circ G \circ A^t)_{rs}. \end{aligned}$$

□

Definition 46.10. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Definition 46.11. Es sei V ein reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Diese Bilinearfrom heißt

(1) *positiv definit*, wenn $\langle v, v \rangle > 0$ ist für alle $v \in V$, $v \neq 0$.
(2) *negativ definit*, wenn $\langle v, v \rangle < 0$ ist für alle $v \in V$, $v \neq 0$.
(3) *positiv semidefinit*, wenn $\langle v, v \rangle \geq 0$ ist für alle $v \in V$.
(4) *negativ semidefinit*, wenn $\langle v, v \rangle \leq 0$ ist für alle $v \in V$.
(5) *indefinit*, wenn $\langle -, - \rangle$ weder positiv semidefinit noch negativ semidefinit ist.

Positiv definite symmetrische Bilinearformen nennt man auch Skalarprodukte. Eine Bilinearform auf V kann man auf einen Untervektorraum $U \subseteq V$ einschränken, wodurch sich eine Bilinearform auf U ergibt. Wenn die ursprüngliche Form positiv definit ist, so überträgt sich dies auf die Einschränkung. Allerdings kann eine indefinite Form eingeschränkt auf gewisse Unterräume positiv definit werden und auf andere negativ definit. Dies führt zu folgender Definition.

Definition 46.12. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Man sagt, dass eine solche Bilinearform den *Typ*

$$(p, q)$$

besitzt, wobei

$$p = \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(U), U \subseteq V, \langle -, - \rangle|_U \text{ positiv definit}\right)$$

und

$$q = \max\left(\dim_{\mathbb{R}}(W), W \subseteq V, \langle -, - \rangle|_W \text{ negativ definit}\right)$$

ist.

James Joseph Sylvester (1814-1897

Wie für Skalarprodukte nennt man zwei Vektoren $v, w \in V$ *orthogonal* bzgl. einer Bilinearform, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist, und wie im Fall eines Skalarproduktes kann man zeigen, dass es Orthogonalbasen gibt. Die folgende Aussage nennt man den *Trägheitssatz von Sylvester*.

Satz 46.13. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ (p, q). Dann ist die Gramsche Matrix von $\langle -, - \rangle$ bzgl. einer jeden Orthogonalbasis eine Diagonalmatrix mit p positiven und q negativen Einträgen.*

Beweis. Bzgl. einer Orthogonalbasis $u_1, \ldots, u_n$ hat die Gramsche Matrix natürlich Diagonalgestalt. Es sei p' die Anzahl der positiven Diagonaleinträge und q' die Anzahl der negativen Diagonaleinträge. Die Basis sei so geordnet, dass die ersten p' Diagonaleinträge positiv, die folgenden q' Diagonaleinträge negativ und die übrigen 0 seien. Auf dem p'-dimensionalen Unterraum $U = \langle u_1, \ldots, u_{p'} \rangle$ ist die eingeschränkte Bilinearform positiv definit, so dass $p' \leq p$ gilt. Sei $W = \langle u_{p'+1}, \ldots, u_n \rangle$, auf diesem Unterraum ist die Bilinearform negativ semidefinit. Dabei ist $V = U \oplus W$, und diese beiden Räume sind orthogonal zueinander.

Angenommen, es gebe einen Unterraum U', auf dem die Bilinearform positiv definit ist, und dessen Dimension größer als p' ist. Dann ist $U' \not\subseteq U$. Wir können annehmen, dass $U \subseteq U'$ ist, da man eine Orthogonalbasis von U zu einer Orthogonalbasis von $U + U'$ ergänzen kann, und dabei die positive Definitheit erhalten bleibt. Es gibt dann ein $u \in U'$, $u \notin U$, das orthogonal zu U ist. Daher ist $u \in W$. Dann ist aber zugleich $\langle u, u \rangle$ positiv und nicht positiv, ein Widerspruch. $\square$

47. Symmetrische Bilinearformen

47.1. Minorenkriterien für symmetrische Bilinearformen.

Satz 47.1. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bzgl. dieser Basis. Die Determinanten D_k der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k}$$

seien alle von 0 verschieden für $k = 1, \ldots, n$. Es sei q die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1 = \det\, M_1,\ D_2 = \det\, M_2, \ldots, D_n = \det\, M_n = \det\, G\,.$$

Dann ist $\langle -, - \rangle$ vom Typ $(n - q, q)$.

Beweis. Da nach Voraussetzung insbesondere die Determinante der Gramschen Matrix nicht 0 ist, ist die Bilinearform nicht ausgeartet und daher hat der Typ die Form $(n - b, b)$. Wir müssen zeigen, dass $b = q$ ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von V, wobei der Induktionsanfang trivial ist. Die Aussage sei bis zur Dimension $n - 1$ bewiesen und es liege ein n-dimensionaler Raum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit den angegebenen Eigenschaften vor. Der Unterraum

$$U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$$

hat die Dimension $n - 1$ und die Folge der Determinanten der Untermatrizen der Gramschen Matrix zur eingeschränkten Form $\langle -, - \rangle|_U$ stimmt mit der vorgegebenen Folge überein, wobei lediglich das letzte Glied

$$D_n \,=\, \det\, M_n \,=\, \det\, G$$

weggelassen wird. Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\langle -, - \rangle|_U$ den Typ $(n - 1 - a, a)$, wobei a die Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge

$$D_0 = 1,\ D_1, \ldots, D_{n-1}$$

ist. Aufgrund der Definition des Typs ist

$$a \,\leq\, b \,\leq\, a + 1,$$

da ein b-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$, auf dem die Bilinearform negativ definit ist, zu einem Unterraum $W' = U \cap W \subseteq U$ führt, der die Dimension b oder $b - 1$ besitzt und auf dem die eingeschränkte Form ebenfalls negativ definit ist. Nach Aufgabe 47.2 ist das Vorzeichen von D_{n-1} gleich $(-1)^a$ und das Vorzeichen von D_n gleich $(-1)^b$. Das bedeutet, dass zwischen D_{n-1} und D_n ein zusätzlicher Vorzeichenwechsel genau dann vorliegt, wenn

$$b \,=\, a + 1$$

ist. □

Korollar 47.2. *Sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -, - \rangle$ bzgl. dieser Basis und es seien D_k die Determinanten der quadratischen Untermatrizen*

$$M_k = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq k},\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ positiv definit, wenn alle D_k positiv sind.*
(2) *Genau dann ist $\langle -, - \rangle$ negativ definit, wenn das Vorzeichen in der Folge $D_0 = 1,\ D_1,\ D_2, \ldots, D_n$ an jeder Stelle wechselt.*

Beweis. (1). Wenn die Bilinearform positiv definit ist, so ist nach Aufgabe 47.2 das Vorzeichen der Determinante der Gramschen Matrix gleich $(-1)^0 = 1$, also positiv. Da die Einschränkung der Form auf die Unterräume $U_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$ ebenfalls positiv definit ist, sind auch die Determinanten zu den Untermatrizen positiv. Wenn umgekehrt die Determinanten alle positiv sind, so folgt aus Satz 47.1, dass die Bilinearform positiv definit ist. (2) folgt aus (1), indem man die negative Bilinearform, also $-\langle -, - \rangle$, betrachtet. $\square$

47.2. **Die Taylor-Formel - Vorbereitungen.**

Ein Polynom in n Variablen,

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \sum_{(r_1,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \end{aligned}$$

(wobei die Summe endlich ist) lässt sich entlang des Grades des Eponententupels, also

$$\mid r \mid = \mid (r_1, \ldots, r_n) \mid = \sum_{j=1}^{n} r_j$$

anordnen, also

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_n) \\ = & \sum_{d=0}^{e} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n,\ |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right). \end{aligned}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ kann man dies auch schreiben als

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; T_k(x_1, \ldots, x_n) + R_k(x_1, \ldots, x_n)$$

mit ($x = (x_1, \ldots, x_n)$)

$$T_k(x) = \sum_{d=0}^{k} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n) \in \mathbb{N}^n,\ |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right)$$

und

$$R_k(x) = \sum_{d=k+1}^{e} \left(\sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n,\, |r|=d} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \right) .$$

Für R_k gilt dabei

$$\lim_{x\to 0} \frac{||\, R_k(x)\, ||}{||\, x\, ||^k} = 0 \,.$$

Bei $k = 1$ ist

$$T_1(x) = a_{(0,\ldots,0)} + a_{(1,0,\ldots,0)} x_1 + \ldots + a_{(0,\ldots,0,1)} x_n$$

die lineare Approximation von f im Punkt $0 = (0, \ldots, 0)$, und dabei gilt für die Abweichung in der linearen Approximation die Beziehung $r(x) = \frac{R_1(x)}{||x||}$. Im Allgemeinen liefern die Polynome $T_k(x)$ bessere Approximationen im Nullpunkt als die lineare Approxmation, und mit $R_k(x)$ kann man die Abweichung kontrollieren. Entscheidend für uns ist, dass man nicht nur für Polynomfunktionen, sondern generell für hinreichend oft differenzierbare Funktionen f approximierende Polynome finden und die Abweichung gut kontrollieren kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Formel für Funktionen in mehreren Variablen.*

Zu einem Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und einem Tupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ aus natürlichen Zahlen setzt man

$$x^r = x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n} \,.$$

Entsprechend schreibt man für eine Polynomfunktion abkürzend

$$f(x_1, \ldots, x_n) \; = \sum_{(r_1,\ldots,r_n)\in\mathbb{N}^n} a_{(r_1,\ldots,r_n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_n^{r_n} \; = \sum_{r\in\mathbb{N}^n} a_r x^r.$$

Die gleiche Abkürzungsphilosophie übernimmt man für Richtungsableitungen. Wenn V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$, so setzt man $D_i = D_{v_i}$, und für $r = (r_1, \ldots, r_n)$ setzt man

$$D^r = D_1^{r_1} \circ D_2^{r_2} \circ \cdots \circ D_n^{r_n} \,.$$

Man beachte, dass man aufgrund des Satzes von Schwarz unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen sämtliche Reihenfolgen von Richtungsableitungen in dieser Weise ausdrücken kann. Des weiteren definieren wir für ein Tupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ die *Fakultät* durch

$$r! := r_1! \cdots r_n!$$

Bevor wir die Taylor-Formel beweisen, die das lokale Verhalten einer Funktion in einer „kleinen“ offenen Ballumgebung eines Punktes beschreibt, wenden wir uns dem lokalen Verhalten in dem Punkt längs einer fixierten Richtung zu, wofür wir die Taylor-Formel in einer Variablen zur Verfügung haben. Zu einer Funktion ($G \subseteq V$, V euklidischer Vektorraum)

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist die Differenzierbarkeit im Punkt $P \in G$ in Richtung $v \in V$ äquivalent zur Differenzierbarkeit der Funktion

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

für $t = 0$, wobei I ein geeignetes reelles Intervall ist. Wir werden zunächst zeigen, dass eine entsprechende Beziehung auch für höhere Ableitungen gilt.

Satz 47.3. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P + tv),$$

wobei I ein offenes Intervall um 0 sei mit $P + tv \in G$ für alle $t \in I$. Dann ist h ebenfalls k-mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$h^{(k)}(t) \ = \sum_{|r|=k} \frac{k!}{r!} D^r f(P + tv) \cdot v^r$$

für alle $t \in I$.

Beweis. Wir zeigen durch Induktion, dass

$$h^{(k)}(t) \ = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}$$

gilt. Hier wird also über jede Richtungsreihenfolge der Länge k aufsummiert, später werden wir unter Verwendung des Satzes von Schwarz gleiche Summanden zusammenfassen. Für $k = 1$ ist

$$\begin{aligned} h'(t) &= (D_v f)(P + tv) \\ &= (Df)_{P+tv}(v) \\ &= (Df)_{P+tv}\Big(\sum_{j=1}^n v_j e_j\Big) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \cdot (Df)_{P+tv}(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n v_j \cdot D_j f(P + tv). \end{aligned}$$

Der Induktionsschluss ergibt sich aus

$$\begin{aligned} h^{(k+1)}(t) &= (h^{(k)})'(t) \\ &= \Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}\Big)'(t) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P + tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k}\Big) v_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k} D_j D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P+tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_j \Big) \\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_k,j)\in\{1,\ldots,n\}^{k+1}} D_j D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(P+tv) \cdot v_{i_1} \cdots v_{i_k} v_j . \end{aligned}$$

Aufgrund des Satzes von Schwarz kommt es nicht auf die Reihenfolge der Richtungableitungen an, d.h. zwei Summanden in der obigen Summe stimmen überein, wenn darin die jeweiligen Richtungsableitungen gleichhäufig vorkommen. Die Anzahl der Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$ in $\{1, \ldots, n\}^k$, bei denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, wird durch die Polynomialkoeffizienten

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

beschrieben.Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Definition 47.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k-mal stetig-differenzierbare Funktion und $P \in G$. Dann heißt

$$\sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, |r|\le k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r$$

das *Taylor-Polynom vom Grad* $\le k$ zu f in P.

Satz 47.5. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $P \in G$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^n$ derart, dass die Strecke von P nach $P + v$ ganz in G liegt. Dann gibt es ein $c \in [0, 1]$ mit

$$f(P+v) = \sum_{|r|\le k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r .$$

Beweis. Die Funktion

$$h :]-\delta, 1+\delta[\longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(t) = f(P+tv),$$

(mit einem geeigneten $\delta > 0$) ist nach Satz 47.3 $(k+1)$-mal differenzierbar. Aufgrund der Taylor-Formel für eine Variable gibt es ein $c \in [0, 1]$[6] mit

$$h(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} .$$

[6] Der Beweis der Taylor-Formel für eine Variable zeigt, dass c zwischen den beiden beteiligten Punkten gewählt werden kann.

Wir drücken die einzelnen Summanden mit Hilfe von Satz 47.3 aus und erhalten

$$\begin{aligned} f(P+v) &= h(1) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \frac{h^{(j)}(0)}{j!} + \frac{h^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} \\ &= \sum_{|r|\leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r|=k+1} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r . \end{aligned}$$

□

48.1. **Die Taylor-Formel.**

Satz 48.1. *Sei* $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine k*-mal stetig differenzierbare Funktion,* $P \in G$ *ein Punkt und* $\epsilon > 0$ *derart, dass* $U(P, \epsilon) \subseteq G$ *ist. Dann gilt für alle* $v \in U(P, \epsilon)$ *die Beziehung*

$$f(P + v) = \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + R_k(v),$$

wobei

$$\lim_{v \to 0} \frac{|| R_k(v) ||}{|| v ||^k} = 0$$

ist.

Beweis. Nach Satz 47.5 gibt es zu jedem $v \in U(0, \epsilon)$ ein (von v abhängiges) $c \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} f(P + v) &= \sum_{|r| \leq k-1} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} D^r f(P + cv) \cdot v^r \\ &= \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r + \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \left(D^r f(P + cv) - D^r f(P) \right) v^r . \end{aligned}$$

Die rechte Summe ist also die Abweichungsfunktion R_k, die wir abschätzen müssen. Wegen

$$\begin{aligned} || R_k(v) || &\leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \, || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v^r || \\ &= \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \, || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot | v_1^{r_1} | \cdots | v_n^{r_n} | \\ &\leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \, || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v ||^{r_1} \cdots || v ||^{r_n} \\ &= \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \, || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \cdot || v ||^k \end{aligned}$$

ist

$$\frac{|| R_k(v) ||}{|| v ||^k} \leq \sum_{|r| = k} \frac{1}{r!} \, || D^r f(P + cv) - D^r f(P) || \, .$$

Da nach Voraussetzung die k-ten Richtungsableitungen stetig sind, existiert für jede einzelne Funktion $D^r f(P + cv) - D^r f(P)$ der Limes für $v \to 0$ und ist gleich 0. Daher gilt dies auch für die Summe rechts und damit auch für den Ausdruck links. □

48.2. **Hinreichende Kriterien für lokale Extrema.**

Wir kommen jetzt zu hinreichenden Kriterien für die Existenz von lokalen Extrema einer Funktion

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R},$$

die auf Eigenschaften der zweiten Richtungsableitungen, genauer der Hesse-Form, beruhen und die entsprechenden Kriterien in einer Variablen verallgemeinern. Zunächst brauchen wir ein Lemma, das beschreibt, wie die Definitheit der Hesse-Form vom Punkt abhängt.

Lemma 48.2. *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_P f$ positiv (negativ) definit sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ in jedem Punkt $Q \in U$ positiv (negativ) definit ist.

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $G(Q)$ die Gramsche Matrix zur Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ im Punkt $Q \in G$ bzgl. dieser Basis. Aufgrund der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen hängt $G(Q)$ stetig von Q ab. Daher hängen auch die Determinanten der quadratischen Untermatrizen von $G(Q)$ stetig von Q ab. Die Determinanten

$$D_k(P) = \det \left((G(P)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \right)$$

sind alle von 0 verschieden. Daher gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass für alle $Q \in U$ die Determinanten

$$D_k(Q) = \det \left((G(Q)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} \right)$$

das gleiche Vorzeichen haben wie $D_k(P)$. Da diese Vorzeichen nach Korollar 47.2 über die Definitheit entscheiden, folgt die Behauptung. $\square$

Satz 48.3. *Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Es sei $P \in G$ mit $(Df)_P = 0$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ negativ definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Maximum in P.*
(2) *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ positiv definit ist, so besitzt f ein isoliertes lokales Minimum in P.*
(3) *Wenn $\operatorname{Hess}_P f$ indefinit ist, so besitzt f in P weder ein Minimum noch ein Maximum.*

Beweis. (1). Aufgrund von Lemma 48.2 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass die Hesse-Form $\operatorname{Hess}_Q f$ negativ definit ist für alle $Q \in U(P, \delta)$. Für alle Vektoren $v \in V$, $v \in U(0, \delta)$, gibt es nach Satz 47.5 ein $c = c(v) \in [0, 1]$ mit

$$f(P+v) \;=\; f(P) + \sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P+cv) \cdot v^r \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v).$$

Da die Hesse-Form rechts negativ definit ist, steht rechts für $v \neq 0$ eine Zahl, die echt kleiner als $f(P)$ ist. Daher liegt ein isoliertes lokales Maximum vor. (2) wird wie (1) bewiesen oder durch betrachten von $-f$ darauf zurückgeführt. (3). Sei $\operatorname{Hess}_P f$ indefinit. Dann gibt es Vektoren v und w mit

$$\operatorname{Hess}_P f(v,v) > 0 \text{ und } \operatorname{Hess}_P f(w,w) < 0\,.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit der Hesse-Form gelten diese Abschätzungen auch für $\operatorname{Hess}_Q f$ für Q aus einer offenen Umgebung von P (mit den gleichen Vektoren v und w). Wir können durch Skalierung von v und w annehmen, dass $P + v$ und $P + w$ zu dieser Umgebung gehören. Wie im Beweis zu Teil (1) gilt daher (v und w sind nicht 0)

$$f(P+v) \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+cv} f(v,v) \;>\; f(P)$$

und

$$f(P+w) \;=\; f(P) + \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_{P+dw} f(w,w) \;<\; f(P)$$

mit $c, d \in [0, 1]$. Also kann in P kein Extremum vorliegen. □

Beispiel 48.4. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x + 3x^2 - 2xy - y^2 + y^3.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 6x - 2y \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y + 3y^2\,.$$

Zur Berechnung der kritischen Punkte dieser Funktion eliminieren wir x und erhalten die Bedingung

$$9y^2 - 8y + 1 \;=\; 0,$$

die zu

$$y \;=\; \frac{\pm\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}$$

führt. Die kritischen Punkte sind also

$$P_1 = \left(\frac{2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}\right) \text{ und } P_2 = \left(\frac{-2\sqrt{7}-1}{54}, \frac{-\sqrt{7}}{9} + \frac{4}{9}\right).$$

Die Hesse-Form ist in einem Punkt $Q = (x, y)$ gleich

$$\operatorname{Hess}_Q f = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2+6y \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Typs ziehen wir Satz 47.1 heran, wobei der erste Minor, also 6, natürlich positiv ist. Die Determinante der Hesse-Matrix ist

$$-16 + 36y\,,$$

was genau bei $y > \frac{4}{9}$ positiv ist. Dies ist im Punkt P_1 der Fall, aber nicht im Punkt P_2. Daher ist die Hesse-Matrix im Punkt P_1 nach Satz 47.1 positiv definit und somit besitzt die Funktion f im Punkt P_1 nach Satz 48.3 ein lokales Minimum, das zugleich ein globales Minimum ist. In P_2 ist die Determinante negativ, so dass dort die Hesse-Form indefinit ist und somit, wiederum nach Satz 48.3, kein Extremum vorliegen kann.

Beispiel 48.5. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^y.$$

Nach Aufgabe 26.10 ist

$$x^y = e^{(\ln x)\cdot y}\,.$$

Die partiellen Ableitungen sind

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} \text{ und } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (\ln x) \cdot e^{(\ln x)\cdot y}\,.$$

Da die Exponentialfunktion stets positiv ist, ist $P = (1, 0)$ der einzige kritische Punkt. Die Hesse-Matrix in einem Punkt (x, y) ist

$$\begin{pmatrix} \frac{-y+y^2}{x^2} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} & \frac{1+\ln x}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} \\ \frac{1+\ln x}{x} \cdot e^{(\ln x)\cdot y} & (\ln x)^2 \cdot e^{(\ln x)\cdot y} \end{pmatrix}.$$

In P ist dies

$$\operatorname{Hess}_P \varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Korollar 47.2 ist daher die Hesse-Form im kritischen Punkt weder positiv definit noch negativ definit. Man kann direkt zeigen, dass diese Matrix indefinit ist (vom Typ $(1, 1)$), da diese Bilinearform auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ positiv und auf $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ negativ ist. Nach Satz 48.3 liegt in diesem Punkt also kein Extremum vor.

Dies kann man auch ohne Differentialrechnung erkennen. Für $x = 1$ oder $y = 0$ ist $x^y = 1$. Ansonsten gelten die folgenden Beziehungen.

(1) Für $0 < x < 1$ und $y > 0$ ist $x^y < 1$.
(2) Für $x > 1$ und $y > 0$ ist $x^y > 1$.
(3) Für $0 < x < 1$ und $y < 0$ ist $x^y > 1$.
(4) Für $x > 1$ und $y < 0$ ist $x^y < 1$.

Daher gibt es in jeder Umgebung von $(1, 0)$ Punkte, an denen die Funktionswerte größer als auch kleiner als 1 sind.

48.3. **Vollständige metrische Räume.**

In den folgenden Vorlesungen werden wir verstärkt topologische Hilfsmittel verwenden, insbesondere werden wir mit allgemeinen vollständigen Räumen (einschließlich Funktionenräumen) arbeiten. Einem Großteil der folgenden Definition sind wir schon bei Aufgaben begegnet.

Definition 48.6. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

gilt.

Definition 48.7. Ein metrischer Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Definition 48.8. Es sei

$$f : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Eine solche Zahl c heißt *Lipschitz-Konstante*. Lipschitz-stetige Funktionen mit einer Lipschitz-Konstanten < 1 bekommen einen eigenen Namen.

Definition 48.9. Es sei

$$f : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Die Zahl c nennt man auch einen *Kontraktionsfaktor*.

Definition 48.10. Es sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

49. Banachscher Fixpunktsatz

49.1. Der Banachsche Fixpunktsatz.

Satz 49.1. *Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und*

$$f : M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$, ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$. Wenn $x, y \in M$ Fixpunkte sind, so folgt aus

$$d(x, y) \,=\, d(f(x), f(y)) \,<\, c \cdot d(x, y)$$

sofort $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$, es kann also maximal einen Fixpunkt geben. Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M. Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \,\leq\, c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \,\leq\, c^n \cdot d(f(x), x) \,=\, c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} d(f^n(x), f^m(x)) &\leq d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \\ &\qquad \ldots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ &\leq a(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c^{m+1} + c^m) \\ &= ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c^2 + c^1 + 1) \leq c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist.Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss. □

49.2. Der Satz über die Umkehrabbildung.

Der Satz über die (lokale) Umkehrabbildung gehört zu den wichtigsten Sätzen der mehrdimensionalen Analysis. Er besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung φ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, für die das totale Differential in einem Punkt bijektiv ist (was voraussetzt, dass die Dimension des Definitionsraum mit der Dimension des Zielraums übereinstimmt), die Abbildung selbst auf geeigneten kleinen offenen Umgebungen von P und von $\varphi(P)$ eine Bijektion ist. D.h. die Abbildung verhält sich *lokal* so wie das totale Differential.

Wir brauchen einige Vorbereitungen. Der Beweis des folgenden Lemmas ist schon eine gute Einstimmung für den Beweis des folgenden Hauptsatzes.

Lemma 49.2. *Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume, $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen und sei*

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2 \subseteq V_2$$

eine bijektive differenzierbare Abbildung. Sei $P \in U_1$. Das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

sei bijektiv und die Umkehrabbildung

$$\psi : U_2 \longrightarrow U_1$$

sei stetig in $Q = \varphi(P)$. Dann ist die Umkehrabbildung differenzierbar in Q und für ihre Ableitung gilt

$$(D\psi)_Q = ((D\varphi)_P)^{-1} .$$

Beweis. Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum als auch im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung D^{-1}. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1 .$$

Diese ist wieder differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$ nach der Kettenregel. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für φ, da eine lineare Abbildung differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass φ eine differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Nach diesen Reduktionen bedeutet die Differenzierbarkeit von φ in 0, dass der Limes

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\varphi(v) - v}{|| v ||} = 0$$

ist. Wir müssen entsprechend für die Umkehrabbildung ψ die Beziehung

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\psi(w) - w}{|| w ||} = 0$$

zeigen. Es genügt, dies für jede Folge $w_n \rightarrow 0$ nachzuweisen. Eine solche Folge kann man eindeutig schreiben als $w_n = \varphi(v_n)$ (mit $v_n = \psi(w_n)$) und aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von ψ konvergiert auch die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0. Also ist

$$\begin{aligned} \frac{|| \psi(w_n) - w_n ||}{|| w_n ||} &= \frac{|| \psi(\varphi(v_n)) - \varphi(v_n) ||}{|| \varphi(v_n) ||} \\ &= \frac{|| v_n - \varphi(v_n) ||}{|| \varphi(v_n) ||} \end{aligned}$$

$$= \frac{||\,\varphi(v_n) - v_n\,||}{||\,\varphi(v_n)\,||}.$$

Wegen $\varphi(v) = v + \,||\,v\,||\, \cdot r(v)$ mit $\lim_{v \to 0} r(v) = 0$ gibt es eine hinreichend kleine Umgebung von 0 derart, dass

$$||\,\varphi(v)\,|| = ||\,v + ||\,v\,||\, \cdot r(v)\,|| \geq \frac{1}{2}\,||\,v\,||\,.$$

Daher lässt sich die obere Gleichungskette (für n hinreichend groß) fortsetzen durch

$$\leq 2 \cdot \frac{||\,\varphi(v_n) - v_n\,||}{||\,v_n\,||}\,,$$

und dies konvergiert gegen 0. □

Im allgemeinen ist eine differenzierbare Abbildung nicht bijektiv. Man kann das Lemma aber häufig anwenden, indem man zu einer kleineren offenen Umgebung des Punktes P übergeht und für diese die Bijektivität auf das Bild zeigt.

Im Beweis des folgenden Satzes geht auch die folgende Version des Mittelwertsatzes ein.

Lemma 49.3. *Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ sei offen und enthalte mit je zwei Punkten die Verbindungsgerade. Es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Abbildung und es gelte

$$||\,(D\varphi)_x\,|| \leq b$$

für alle $x \in G$. Dann gilt für $P, Q \in G$ die Abschätzung

$$||\,\varphi(Q) - \varphi(P)\,|| \leq ||\,Q - P\,|| \cdot b.$$

Beweis. Bei $P = Q$ ist nichts zu zeigen, sei also $P \neq Q$. Wir betrachten die Abbildung

$$h : [0, ||\,Q - P\,||] \longrightarrow W,\; t \longmapsto \varphi(P + t\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||}).$$

Da nach Voraussetzung $P + t\frac{Q-P}{||Q-P||} \in G$ ist, ist dies eine differenzierbare Kurve. Daher gibt es nach der Mittelwertabschätzung für Kurven ein $c \in [0, ||\,Q - P\,||]$ mit

$$\begin{aligned}
||\,\varphi(P) - \varphi(Q)\,|| &\leq ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,h'(c)\,|| \\
&= ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}(\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||})\,|| \\
&= ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}\,|| \cdot ||\,\frac{Q - P}{||\,Q - P\,||}\,|| \\
&\leq ||\,Q - P\,|| \cdot ||\,(D\varphi)_{P + c\frac{Q-P}{||Q-P||}}\,|| \\
&\leq ||\,Q - P\,|| \cdot b.
\end{aligned}$$

□

Der folgende Satz besagt, dass eine stetig differenzierbare Abbildung in einer geeigneten offenen Umgebung eines Punktes bijektiv ist, wenn die Ableitung in diesem Punkt bijektiv ist. D.h., dass sich die Abbildung lokal so verhält wie die lineare Approximation.

Satz 49.4. *Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume, sei $G \subseteq V_1$ offen und es sei*

$$\varphi : G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt derart, dass das totale Differential

$$(D\varphi)_P$$

bijektiv ist. Dann gibt es eine offene Menge $U_1 \subseteq G$ und eine offene Menge $U_2 \subseteq V_2$ mit $P \in U_1$ und mit $\varphi(P) \in V_2$ derart, dass φ eine Bijektion

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

induziert, und dass die Umkehrabbildung

$$(\varphi|_{U_1})^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls stetig differenzierbar ist.

Beweis. Wir beginnen mit einigen Reduktionen.Zuerst kann man durch Verschiebungen im Definitionsraum als auch im Zielraum annehmen, dass $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ ist. Es sei $D = (D\varphi)_P$ die durch das totale Differential gegebene bijektive lineare Abbildung mit der linearen Umkehrabbildung D^{-1}. Wir betrachten die Gesamtabbildung

$$G \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{D^{-1}} V_1 .$$

Diese ist wieder stetig differenzierbar, und das totale Differential davon ist $D^{-1} \circ D = \mathrm{Id}$. Wenn wir für diese zusammengesetzte Abbildung die Aussage zeigen können, so folgt die Aussage auch für φ, da eine lineare Abbildung stetig differenzierbar ist. Wir können also annehmen, dass $\varphi : V_1 \to V_1 = V_2$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ ist, deren totales Differential in 0 die Identität ist. Wir werden dennoch von V_1 und V_2 sprechen, um klar zu machen, ob sich etwas im Definitionsraum oder im Zielraum abspielt. Sei $y \in V_2$ fixiert. Wir betrachten die Hilfsabbildung

$$H_y : G \longrightarrow V_2,\ x \longmapsto H_y(x) = x - \varphi(x) + y.$$

Diese Hilfabbildung erfüllt folgende Eigenschaft: Ein Punkt $x \in G$ ist genau dann ein Fixpunkt von H_y, also ein Punkt mit $H_y(x) = x - \varphi(x) + y = x$, wenn $\varphi(x) = y$ ist, d.h. wenn x ein Urbild von y unter φ ist. Die Abbildungen H_y sind selbst stetig differenzierbar und es gilt

$$(DH_y)_x = \mathrm{Id} - (D\varphi)_x .$$

Wir möchten den Banachschen Fixpunktsatz auf H_y anwenden, um dafür einen Fixpunkt zu gewinnen und diesen als Urbildpunkt von y unter φ nehmen zu können.Wegen der Stetigkeit von $x \mapsto (D\varphi)_x$ und wegen $(D\varphi)_0 = \mathrm{Id}$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, derart, dass für alle $x \in B(0, r)$ die Abschätzung

$$|| (DH_y)_x || = || \mathrm{Id} - (D\varphi)_x || \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Für jedes $x \in B(0, r)$ gilt daher nach der Mittelwertabschätzung die Abschätzung

$$\begin{aligned} || x - \varphi(x) || &= || H_0(x) || \\ &= || H_0(x) - H_0(0) || \\ &\leq \frac{1}{2} \, || x || \, . \end{aligned}$$

Für $y \in B(0, \frac{r}{2})$ und $x \in B(0, r)$ gilt

$$\begin{aligned} || H_y(x) || &= || x - \varphi(x) + y || \\ &\leq || x - \varphi(x) || + || y || \\ &\leq \frac{|| x ||}{2} + \frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \\ &= r. \end{aligned}$$

Für jedes $y \in B(0, \frac{r}{2})$ liegt also eine Abbildung

$$H_y : B(0, r) \longrightarrow B(0, r)$$

vor. Wegen der oben formulierten Ableitungseigenschaft und aufgrund der Mittelwertabschätzung gilt für zwei Punkte $x_1, x_2 \in B(0, r)$ die Abschätzung

$$|| H_y(x_1) - H_y(x_2) || \leq \frac{1}{2} \, || x_1 - x_2 ||,$$

so dass H_y eine stark kontrahierende Abbildung ist. Da ein euklidischer Vektorraum und damit auch die abgeschlossene Kugel $B(0, r)$ vollständig sind, besitzt jede Abbildung H_y aufgrund des Banachschen Fixpunktsatzes genau einen Fixpunkt aus $B(0, \frac{r}{2})$, den wir mit $\psi(y)$ bezeichnen. Aufgrund der eingangs gemachten Überlegung ist $\varphi(\psi(y)) = y$. Zu $y \in U(0, \frac{r}{2})$ gehört das eindeutige Urbild $x \in B(0, r)$ zur offenen Kugel $U(0, r)$, wie die obige Abschätzung zeigt. Wir setzen $U_2 = U(0, \frac{r}{2})$ und $U_1 = \varphi^{-1}(U_2) \cap U(0, r)$, wobei U_1 aufgrund der Stetigkeit von φ offen ist. Die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2, \; x \longmapsto \varphi(x)$$

ist wieder stetig und bijektiv. Insbesondere gibt es (lokal) eine Umkehrabbildung

$$\psi : U_2 \longrightarrow U_1,$$

die wir als stetig differenzierbar nachweisen müssen. Wir zeigen zuerst, dass ψ Lipschitz-stetig ist mit der Lipschitz-Konstanten 2. Seien $y_1, y_2 \in U_2$ gegeben mit den eindeutigen Elementen $x_1, x_2 \in U_1$ mit $\varphi(x_1) = y_1$ und $\varphi(x_2) = y_2$. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x_2 - x_1\| &= \|H_0(x_2) + \varphi(x_2) - H_0(x_1) - \varphi(x_1)\| \\ &\leq \|H_0(x_2) - H_0(x_1)\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| + \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\|, \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung auf obiger Überlegung beruht. Durch Umstellung ergibt sich

$$\|\psi(y_2) - \psi(y_1)\| = \|x_2 - x_1\| \leq 2\,\|y_2 - y_1\|\,.$$

Aufgrund von Lemma 49.2 ist ψ auch differenzierbar und es gilt die Formel

$$(D\psi)_y = ((D\varphi)_{\psi(y)})^{-1}\,.$$

Aus dieser Darstellung lässt sich auch die stetige Abhängigkeit der Ableitung von y ablesen, da ψ stetig ist, da das totale Differential von φ nach Voraussetzung stetig von $x = \psi(y)$ abhängt und da das Bilden der Umkehrmatrix ebenfalls stetig ist. □

50. Diffeomorphismen

50.1. **Diffeomorphismen.**

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 50.1. Es seien V_1 und V_2 euklidische Vektorräume und $U_1 \subseteq V_1$ und $U_2 \subseteq V_2$ offene Teilmengen. Eine Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

heißt C^k-*Diffeomorphismus*, wenn φ bijektiv und k-mal stetig differenzierbar ist, und wenn die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$$

ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist.

Der Satz über die lokale Umkehrbarkeit besagt also, dass eine stetig differenzierbare Abbildung mit invertierbarem totalen Differential lokal (!) ein C^1-Diffeomorphismus ist (es gibt auch C^k-Versionen von diesem Satz). Zwei offene Mengen U_1 und U_2 heißen C^k-*diffeomorph*, wenn es einen C^k-Diffeomorphismus zwischen ihnen gibt.

Definition 50.2. Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, sei $P \in G$ und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine in P differenzierbare Abbildung. Dann heißt P ein *regulärer Punkt* von φ, wenn

$$\operatorname{rang}(D\varphi)_P = \min(\dim(V), \dim(W))$$

ist. Andernfalls heißt P ein *kritischer Punkt* oder ein *singulärer Punkt*.

Bemerkung 50.3. Eine differenzierbare Abbildung $\varphi : G \to W$ ist genau dann regulär in einem Punkt $P \in G$, wenn das totale Differential $(D\varphi)_P$ den maximal möglichen Rang besitzt. Der Rang ist nach Korollar 14.2 und nach Lemma 14.3 gleich dem Spalten- bzw. Zeilenrang einer beschreibenden Matrix. Daher ist der Rang maximal gleich der Anzahl der Zeilen und maximal gleich der Anzahl der Spalten, also maximal gleich dem Minimum der beiden Dimensionen.

Bei $\dim(W) = 1$ ist P ein regulärer Punkt genau dann, wenn $(D\varphi)_P$ nicht die Nullabbildung ist. Daher stimmt diese Definition von regulär mit der Definition überein. Bei $\dim(V) = 1$ bedeutet die Regularität wiederum, dass $(D\varphi)_P \neq 0$ ist. Generell bedeutet bei $\dim(V) \leq \dim(W)$ die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ injektiv ist, und bei $\dim(V) \geq \dim(W)$ bedeutet die Regularität, dass $(D\varphi)_P$ surjektiv ist. Insbesondere bedeutet bei $\dim(V) = \dim(W)$ die Regularität in P, dass das totale Differential bijektiv ist und dass daher die Voraussetzung im Satz über die lokale Umkehrbarkeit erfüllt ist.

Beispiel 50.4. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^2 - y, x + xy).$$

Diese Abbildung ist differenzierbar und die Jacobi-Matrix in einem Punkt $P = (x, y)$ ist

$$\begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 + y & x \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$2x^2 + 1 + y\,,$$

so dass die Bedingung

$$y \neq -2x^2 - 1$$

die regulären Punkte der Abbildung charakterisiert. Im Nullpunkt $(0, 0)$ liegt bspw. ein regulärer Punkt vor, so dass dort aufgrund des Satzes über die lokale Umkehrbarkeit lokal eine Bijektion vorliegt, d.h. es gibt offene Umgebungen U_1 und U_2 von $(0, 0)$ derart, dass die eingeschränkte Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist (mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung).

Wie groß kann dabei U_1 gewählt werden? Wir beschränken uns auf offene Ballumgebungen $U(0, r)$. Bei $r > 1$ enthält eine solche Kreisscheibe zwei Punkte der Art

$$(\pm x, -1)\,.$$

Diese werden unter φ auf

$$\varphi(\pm x, -1) \;=\; (x^2 - (-1), x + x(-1)) \;=\; (x^2 + 1, 0)$$

abgebildet, also auf den gleichen Punkt. Daher ist die Einschränkung der Abbildung auf eine solche Kreischeibe nicht injektiv, und auf einer solchen

Menge kann es keine Umkehrabbildung geben. Betrachten wir hingegen $U_1 = U(0,r)$ mit $r \leq 1$ und $U_2 := \varphi(U_1)$. Da U_1 keine kritischen Punkte enthält, ist nach Aufgabe 50.9 das Bild U_2 offen. Die eingeschränkte Abbildung

$\varphi|_{U_1} : U_1 \to U_2$ ist nach Definition von U_2 surjektiv, so dass nur die Injektivität zu untersuchen ist.

Das Gleichungssystem

$$x^2 - y = u \text{ und } x + xy = v$$

führt auf

$$y = x^2 - u$$

und auf

$$x(1 + x^2 - u) \ = \ x^3 + (1-u)x \ = \ v.$$

Die Ableitung von $x^3 + (1-u)x$ nach x ist $3x^2 + (1-u)$. Sei von nun an $r = \frac{1}{2}$. Dann ist

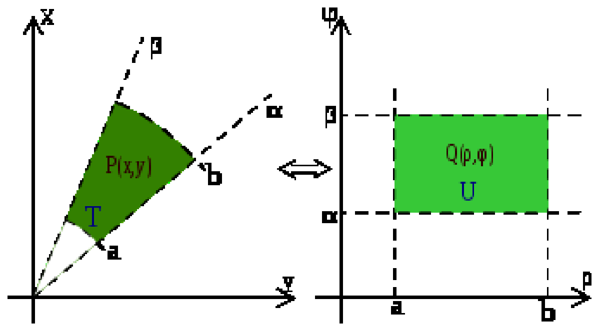
$$u \ = \ x^2 - y \ < \ 1.$$

Daher ist $3x^2 + (1-u) > 0$ und somit ist $x^3 + (1-u)x$ streng wachsend in x nach Satz 28.5. Daher gibt es zu einem vorgegebenen Punkt $(u,v) \in U_2$ nur ein x, das die Bedingung

$$x^3 + (1-u)x = v$$

erfüllt. Wegen $x(y+1) = v$ ist dann auch die zweite Komponente y eindeutig bestimmt. Dies ist klar bei $x \neq 0$ und bei $x = 0$ folgt es aus der ersten Bedingung $x^2 - y = u$.

Wir haben schon für die komplexen Zahlen Polarkoordinaten verwendet, siehe Satz 29.12. Hier besprechen wir Polarkoordinaten in Hinblick auf lokale Umkehrbarkeit.



Beispiel 50.5. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (r, \alpha) \longmapsto (r \cos \alpha\,, r \sin \alpha\,),$$

heißt *Polarkoordinatenabbildung*. Sie ordnet einem Radius und einem Winkel denjenigen Punkt der Ebene zu, zu dem man gelangt, wenn man in Richtung des Winkels (gemessen von der x-Achse aus gegen den Uhrzeigersinn) die

Strecke r zurücklegt. Sie ist in jedem Punkt (r, α) stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung ist nicht injektiv, da die Abbildung im zweiten Argument, also im Winkel α, periodisch mit der Periode 2π ist. Bei $r = 0$ ist - unabhängig von α - das Bild gleich $(0, 0)$. Ferner ist $\varphi(-r, \alpha+\pi) = \varphi(r, \alpha)$. Die Abbildung kann also nicht global invertierbar sein.

Die Determinante der Jacobi-Matrix ist

$$r(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = r.$$

Bei $r \neq 0$ liegt also nach Satz 14.3 ein bijektives totales Differential vor. Nach dem Satz über die lokale Umkehrabbildung gibt es zu jedem Punkt (r, α) mit $r \neq 0$ eine offene Umgebung $(r, \alpha) \in U_1$ und eine bijektive Abbildung

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2 = \varphi(U_1).$$

Bei $r > 0$ kann man bspw. als offene Umgebung das offene Rechteck

$$U_1 =]r - \delta, r + \delta[\times]\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon[$$

mit $r > \delta > 0$ und mit $\pi > \epsilon > 0$ wählen. Das Bild davon, also U_2, ist der Schnitt des (offenen) Kreisringes zu den Radien $r - \delta$ und $r + \delta$ und dem (offenen) Kreissektor, der durch die beiden Winkel $\alpha - \epsilon$ und $\alpha + \epsilon$ begrenzt ist.

Man kann diese Abbildung zu einer bijektiven Abbildung, und zwar zu einem Diffeomorphismus, auf großen offenen Mengen einschränken, bspw. zu

$$\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) | x \leq 0\}, \ (r, \alpha) \longmapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha).$$

Die Bijektivität folgt dabei aus den grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, siehe insbesondere Satz 29.11. Wenn man das offene Intervall $]-\pi, \pi[$ durch das halboffene Intervall $]-\pi, \pi]$ ersetzt, so bekommt man eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi]$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Man kann aber nicht von einem Diffeomorphismus sprechen, da dies nur für offene Mengen definiert ist. Die Umkehrabbildung ist übrigens noch nicht einmal stetig.

51. Implizite Abbildungen

51.1. **Der Satz über implizite Abbildungen.**

Die Küstenlinie ist die Nullfaser der Höhenabbildung. In den regulären Punkten der Küste kann man eine Tangente anlegen und die Küste lokal als Graph einer Funktion beschreiben. Ein singulärer Punkt einer Küste ergibt sich bspw. bei einer Meereserhebung, die genau in einem Punkt an die Wasseroberfläche stößt, oder einem Sattelpunkt zwischen „zwei“ Inseln, der sich auf Meeresniveau befindet.[7]

Definition 51.1. Zu einer Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

zwischen zwei Mengen L und M heißt zu $y \in M$ die Menge

$$F_y = \{x \in L |\, \varphi(x) = y\}$$

die *Faser* von φ über y.

Die Faser zu einem Punkt ist also einfach das Urbild $\varphi^{-1}(\{y\})$ von m. Zu einem Punkt $P \in L$ nennt man φ die Faser über $\varphi(P)$ auch die *Faser durch* P. Bei $M = \mathbb{R}$ sagt man statt Fasern auch *Niveaumengen* oder, insbesondere bei $L = \mathbb{R}^2$, auch *Höhenlinien*.

Beispiel 51.2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine Funktion in einer Variablen. Dazu kann man die Funktion in zwei Variablen,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto y - f(x),$$

betrachten. Die Fasern über $c \in \mathbb{R}$ sind durch

$$F_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, y = f(x) + c\}$$

charakterisiert. D.h. die Faser über c ist einfach der Graph der durch $x \mapsto f(x) + c$ definierten Funktion. Alle Fasern gehen durch eine Verschiebung

[7] Dass man solche singulären Punkte in der Natur nur selten antrifft, liegt daran, dass das Höhenprofil der Erde nur endlich viele kritische Punkte und damit nur endlich viele Gipfel und Sattelpunkte besitzt. Es ist daher unwahrscheinlich, dass der Meeresspiegel genau auf der Höhe eines solchen kritischen Punktes liegt. Wenn man aber Ebbe und Flut betrachtet, so werden solche Punkte immer wieder durchlaufen

ineinander über, sie sind parallel zueinander. Die Punkte einer jeden Faser stehen in Bijektion mit der x-Geraden, indem nämlich x auf $(x, f(x) + c)$ abgebildet wird.

Der *Satz über implizite Abbildungen* wird zeigen, dass unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen die Fasern einer Abbildung sich *lokal* als Graphen von Abbildungen realisieren lassen.

Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit

$$\begin{aligned} & \varphi(x_1, \ldots, x_n) \\ = \; & (\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \\ = \; & (y_1, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

führt unmittelbar zu einem Gleichungssystem

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)\,.$$

Die Lösungsmenge eines solchen Gleichungssystems ist gerade die Faser über $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Man kann sich fragen, wie zu gegebenem $y = (y_1, \ldots, y_m)$ die Lösungsmenge aussieht, welche Struktur sie hat und wie sie sich mit y verändert. Das „grobe Muster“ zeigt sich schon deutlich bei einem *linearen Gleichungssystem* in n Variablen und m Gleichungen. Dort sind bei $n \geq m$, und wenn die Gleichungen linear unabhängig sind, die Lösungsmengen $(n-k)$-dimensionale affine Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Insbesondere sind alle Lösungsmengen gleich und besitzen die gleiche Dimension.

Das Bestimmen der Lösungsmengen ist im Allgemeinen sehr viel schwieriger als im linearen Fall und auch gar nicht effektiv durchführbar. Dennoch vermittelt die lineare Approximation durch das total Differential den richtigen Ansatz für das Studium allgemeiner Fasern. Eine reichhaltige Strukturaussage über die Gestalt der Faser in einem Punkt P ist nur dann zu erwarten, wenn das totale Differential in P surjektiv ist. In diesem Fall ist der Kern des totalen Differentials, also die Lösungsmenge des durch diese lineare Abbildung gegebenen linearen Gleichungssystems, *tangential* an die Faser durch P, und man kann auf hinreichend kleinen offenen Mengen eine Bijektion zwischen dem Kern und der Faser stiften.

Der Querschnitt eines Achats. Die chemische Zusammensetzung variiert mit dem Ort und damit variiert auch die Frequenz des reflektierten Lichts, also die optische Erscheinung, mit dem Ort. Man sieht also die (verdickten) Fasern der Lichtabbildung.

Satz 51.3. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ und es sei $Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$ die Faser durch P. Das totale Differential $(D\varphi)_P$ sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge $P \in W$, $W \subseteq G$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq Z \cap W$ ist und ψ eine Bijektion

$$\psi : V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung ψ ist in jedem Punkt $Q \in V$ regulär und für das totale Differential von ψ gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0\,.$$

Beweis. Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ der Kern des totalen Differentials $(D\varphi)_a$. Aufgrund der vorausgesetzten Surjektivität und der Dimensionsformel ist dies ein $(n-m)$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Durch einen Basiswechsel können wir annehmen, dass K von den ersten $n-m$ Standardvektoren $e_1, \ldots, e_{n-m}$ erzeugt ist (Der Unterraum $\langle e_{n-m+1}, \ldots, e_n \rangle$ wird dann bijektiv auf $\mathbb{R}^m$ abgebildet). Es sei

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} = K,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-m})$$

die lineare Projektion auf K und es sei

$$\begin{aligned} p \times \varphi : G &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ (x_1, \ldots, x_n) &\to (x_1, \ldots, x_{n-m}, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

die zusammengesetzte Abbildung. Diese ist selbst stetig differenzierbar und das totale Differential davon im Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ ist bijektiv, so dass wir darauf den Satz über die Umkehrabbildung anwenden können. Es gibt also offene Umgebungen $a \in U_1$, $U_1 \subseteq G$, und $(a, \varphi(a)) \in U_2$, $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m$, derart, dass die induzierte Abbildung

$$(p \times \varphi)|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

bijektiv ist mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung. Für die offene Menge U_2 gibt es offene Mengen

$$(a_1, \ldots, a_{n-m}) \in V \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \text{ und } \varphi(a) = (b_1, \ldots, b_m) \in V' \subseteq \mathbb{R}^m$$

mit $V \times V' \subseteq U_2$. Wir können den Diffeomorphismus $(p \times \varphi)|_{U_1}$ auf das (offene) Urbild W von $V \times V'$ einschränken. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

bzw. die Einschränkung davon

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & V \times V' \\ & \searrow & \downarrow \\ & & V' \end{array} .$$

Die Faser über $b = \varphi(a)$ ist $V \times \{(b_1, \ldots, b_m)\}$. Diese Menge steht über die horizontale Abbildung $p \times \varphi$ in Bijektion mit der Faser von φ über b, also mit $Z \cap W$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$\psi : V \longrightarrow W, \, (x_1, \ldots, x_{n-m}) \longmapsto (p \times \varphi)^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-m}, b_1, \ldots, b_m).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(\psi(x_1, \ldots, x_{n-m})) &= \varphi((p \times \varphi)^{-1}(x_1, \ldots, x_{n-m}, b_1, \ldots, b_m)) \\ &= (b_1, \ldots, b_m), \end{aligned}$$

so dass das Bild von ψ in der Tat in $Z \cap W$ landet. Die Injektivität von ψ ist klar. Sei nun $(x_1, \ldots, x_n) \in Z \cap W$. Dann ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (b_1, \ldots, b_m)$ und daher ist

$$(p \times \varphi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-m}, b_1, \ldots, b_m) .$$

Also ist

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-m}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

im Bild von ψ. Die Abbildung

$$\psi : V \longrightarrow W$$

ist nach Konstruktion differenzierbar und das totale Differential ist in jedem Punkt $Q \in V$ injektiv, da ψ die Hintereinanderschaltung einer affin-linearen Injektion und eines Diffeomorphismus ist. Da $\psi(V)$ in der Faser von φ über b liegt, ist $\varphi \circ \psi = b$ konstant. Nach der Kettenregel ist $(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0$. □

Bemerkung 51.4. Den Satz über implizite Abbildungen kann man auch so formulieren: es seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und es sei $\varphi : G \to W$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $a \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_a$ surjektiv sei, und es sei $V = E_1 \oplus E_2$ eine direkte Summenzerlegung von V in Untervektorräume E_1 und E_2 (mit $a = (a_1, a_2)$) derart, dass $E_1 = \operatorname{kern}(D\varphi)_a$ und $(D\varphi)_a|_{E_2}$ surjektiv ist (dadurch ist E_1, aber nicht E_2 eindeutig festgelegt). Dann gibt es offene Mengen $a_1 \in U_1 \subseteq E_1$ und $a_2 \in U_2 \subseteq E_2$ mit $U_1 \times U_2 \subseteq G$ und einen Diffeomorphismus

$$\theta : U_1 \longrightarrow U_2$$

derart, dass der Graph von θ, also

$$\Gamma = \{(x, \theta(x)) |\, x \in U_1\},$$

mit der Faser über $b = \varphi(a)$, geschnitten mit $U_1 \times U_2$, also

$$\{(x, v) \in U_1 \times U_2 |\, \varphi(x, v) = b\},$$

übereinstimmt. Sind auf E_1 und E_2 jeweils Basen fixiert mit Koordinaten $(x_1, \ldots, x_{n-m})$ bzw. $(v_1, \ldots, v_m)$ (n und m seien die Dimensionen von V und W), so wird lokal die Faser durch den Graph von m Funktionen $\theta_1, \ldots, \theta_m$ in den $n-m$ Variablen $(x_1, \ldots, x_{n-m})$ gegeben. Die Faser ist dann nach den Variablen $(v_1, \ldots, v_m)$ „aufgelöst“, d.h. diese Koordinaten lassen sich unter der impliziten Bedingung, dass die Punkte zur Faser gehören sollen, explizit durch die anderen, frei wählbaren Koordinaten $(x_1, \ldots, x_{n-m})$ ausdrücken.

Definition 51.5. Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt, in dem das totale Differential $(D\varphi)_P$ surjektiv sei, und sei Y die Faser von φ durch P. Dann nennt man

$$T_P Y := P + \operatorname{kern} (D\varphi)_P = \{P + v |\, (D\varphi)_P(v) = 0\}$$

den *Tangentialraum* an die Faser Y in P.

Der Tangentialraum ist kein Untervektorraum von V, da er nicht durch den Nullpunkt verlaufen muss, er ist aber die Verschiebung eines Untervektorraums. Solche Räume nennt man *affin-lineare Unterräume*. Sie besitzen eine sinnvoll definierte Dimension, nämlich die Dimension des zugehörigen Vektorraumes. Der Tangentialraum an einem regulären Punkt zu einer Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ besitzt die Dimension $n - m$. Der Satz über implizite Abbildungen besagt, dass eine offene Teilmenge des Tangentialraumes an P sich bijektiv und differenzierbar auf eine offene Umgebung von P auf der Faser abbilden lässt. Der Tangentialraum ist also eine *lineare Approximation* der Faser.

Beispiel 51.6. Wir betrachten die differenzierbare Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$\left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}\right),$$

so dass die Funktion in jedem Punkt regulär ist und Satz 51.3 anwendbar ist. In diesem Fall kann man die Fasern auch direkt bestimmen. Die Bedingung

$$\frac{x}{y} = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ führt auf

$$x = cy\,,$$

so dass die Fasern der Abbildung die *punktierten Geraden* (d.h. ein Punkt ist rausgenommen) durch den Nullpunkt sind (außer der x-Achse, auf der die Abbildung nicht definiert ist). Damit hat man explizit eine Auflösung der Faser nach x gegeben. Dass die Fasern unter dieser *Divisionsabbildung* (punktierte) Geraden sind ist ein Ausdruck davon, dass man Brüche erweitern kann, ohne ihren Wert zu ändern.

Der Tangentialraum in $P = (x, y)$ wird nach der Definition durch den Kern der Jacobi-Matrix gegeben, und dieser wird durch den Vektor (x, y) selbst aufgespannt. Der Tangentialraum an P ist hier also die Gerade, die durch P und den Nullpunkt definiert ist, und stimmt (bis auf den Nullpunkt) mit der Faser überein.

52. Vektorfelder

Beispiel 52.1. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^y$$

und knüpfen an Beispiel 48.5 an. Der einzige kritische Punkt ist $P = (1, 0)$, ansonsten ist die Abbildung in jedem Punkt regulär und daher lassen sich lokal die Fasern als Graphen beschreiben. Die Faser über 1 besteht aus der durch $x = 1$ gegebenen Geraden und der durch $y = 0$ gegebenen Halbgeraden, die sich im kritischen Punkt senkrecht schneiden. Ansonsten sind die Fasern durch die Gleichung

$$x^y = c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}_+$ bestimmt (für nichtpositives c sind die Fasern leer). Wir schreiben diese Bedingung als $e^{(\ln x)y} = c$ und daher als

$$(\ln x)y = \ln c\,.$$

Bei $x \neq 1$ kann man dies zu

$$y = \frac{\ln c}{\ln x}$$

auflösen und bei $y \neq 0$ zu

$$x = e^{\frac{\ln c}{y}}\,.$$

52.1. **Der Satz über die injektive Abbildung.**

Als ein weiteres Korollar aus dem Satz über die Umkehrabbildung besprechen wir die Situation, wo das totale Differential injektiv ist.

Satz 52.2. *Seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in V$ ein Punkt, indem das total Differential $(D\varphi)_P$ injektiv sei. Dann gibt es eine offene Umgebung U, $P \in U \subseteq G$, derart, dass $\varphi|_U$ injektiv ist.

Beweis. Es sei $\dim(V) = k$ und $\dim(W) = n$. Es sei $B = (D\varphi)_P(V)$ das Bild des totalen Differentials $(D\varphi)_P$. Nach Lemma 12.5 ist $B \subseteq W$ ein Untervektorraum der Dimension $\dim(B) = k$. Wir ergänzen eine Basis von B durch $w_1, \ldots, w_{n-k}$ zu einer Basis von W und setzen $C = \langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle$. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : G \times C \longrightarrow W,\ (v, w) \longmapsto \varphi(v) + w,$$

wobei links und rechts zwei n-dimensionale Vektorräume stehen. Diese Abbildung kann man auffassen als die Hintereinanderschaltung

$$G \times C \stackrel{\varphi \times \mathrm{Id}_C}{\longrightarrow} W \times C \stackrel{+}{\longrightarrow} W\,.$$

Daher ist die Gesamtabbildung stetig differenzierbar und das totale Differential ist $(D\varphi)_P + i_C$, wobei $i_C : C \to W$ die lineare Einbettung des Unterraums ist. Dieses totale Differential ist surjektiv im Punkt $(P, 0)$, da sowohl B als auch C zum Bild gehören, und somit bijektiv. Wir können also den Satz über die Umkehrabbildung anwenden und erhalten offene Mengen $U_1 \subseteq G \times C$ und $U_2 \subseteq W$ derart, dass $(\varphi \times \mathrm{Id}_C)|_{U_1}$ ein Diffeomorphismus zwischen U_1 und U_2 ist. Dies können wir einschränken auf eine offene Menge der Form $U_3 \times U_4 \subseteq U_1$ mit $P \in U_3 \subseteq G$ und $0 \in U_4 \subseteq C$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi|_{U_3} : U_3 \longrightarrow W$$

injektiv, da dies die Hintereinanderschaltung

$$U_3 \longrightarrow U_3 \times U_4 \longrightarrow U_2 \subseteq W$$

mit $Q \mapsto (Q, 0)$ ist. $\square$

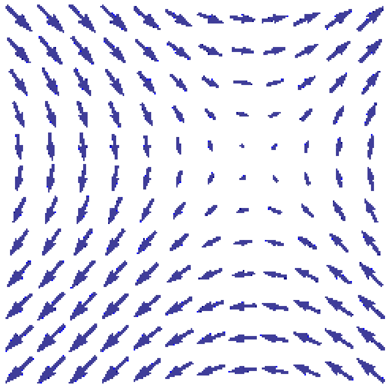
52.2. **Vektorfelder.**

Wir kehren nun zu *gewöhnlichen Differentialgleichungen* zurück, wobei wir im Unterschied zu den beiden Vorlesungen 37 und 38 erlauben, dass die Lösungskurven Kurven in einem höherdimensionalen Vektorraum sind. Mit gewöhnlich wird ausgedrückt, dass die Definitionsmengen der Lösungen eindimensional sind (Differentialgleichungen, deren Lösungen eine höherdimensionale Definitionsmenge ist, heißen *partielle Differentialgleichungen*). Wir werden zuerst beschreiben, welche Daten eine gewöhnliche Differentialgleichung auszeichnen und dann einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung beweisen, den *Satz von Picard-Lindelöf*. Später werden wir uns hauptsächlich auf lineare Differentialgleichungssysteme beschränken.

Definition 52.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $U \subseteq V$ eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein *Vektorfeld* (auf U).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass t die Zeit repräsentiert, v den Ort und $f(t,v) \in V$ einen Vektor, der zum Zeitpunkt t an den Ortspunkt v angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Wenn das Vektorfeld nicht von t abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

52.3. **Gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Definition 52.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Dann nennt man

$$v' = f(t,v)$$

die *gewöhnliche Differentialgleichung* (oder *gewöhnliches Differentialgleichungssystem*) zum Vektorfeld f.

Vektorfelder und gewöhnliche Differentialgleichungssysteme sind im Wesentlichen äquivalente Objekte. Man spricht auch von einem *dynamischen System*. Von Differentialgleichungen spricht man insbesondere dann, wenn man sich für die Lösungen im Sinne der folgenden Definition interessiert.

Definition 52.5. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein Vektorfeld auf U. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v' = f(t,v)$$

heißt eine Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem offenen (Teil)Intervall $J \subseteq I$[8] eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $v(t) \in U$ für alle $t \in J$.
(2) Die Abbildung v ist differenzierbar.
(3) Es ist $v'(t) = f(t, v(t))$ für alle $t \in J$.

Eine Lösung ist also eine differenzierbare Kurve, eine vektorwertige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V.$$

Wenn $V = \mathbb{R}^n$ ist, so wird eine solche Abbildung durch ihre Komponenten

$$(v_1(t), \ldots, v_n(t))$$

beschrieben. Ebenso wird das Vektorfeld durch n, von t und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ abhängige Funktionen $(f_1, \ldots, f_n)$ beschrieben. Die Differentialgleichung lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, v_1, \ldots, v_n) \\ \vdots \\ f_n(t, v_1, \ldots, v_n) \end{pmatrix} .$$

Daher spricht man auch von einem *Differentialgleichungssystem*.

Häufig soll eine Kurve nicht nur eine Differentialgleichung erfüllen, sondern sich zusätzlich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befinden. Dies führt zum Begriff des Anfangswertproblems.

Definition 52.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ gegeben. Dann nennt man

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ mit der *Anfangsbedingung* $v(t_0) = w$.

Definition 52.7. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

[8] Rein formal gesehen ist hier auch das leere Intervall zugelassen, wobei diese „leere Lösung“ natürlich uninteressant ist. Bei einem Anfangswertproblem sichert bereits die Anfangsbedingung, dass die Lösung nicht leer ist.

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v eine Lösung der Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist und wenn zusätzlich

$$v(t_0) = w$$

gilt.

52.4. **Lipschitz-Bedingungen.**

Rudolf Lipschitz (1832-1903)

Für den Satz von Picard-Lindelöf wird die Voraussetzung wesentlich sein, dass das Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Definition 52.8. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es eine reelle Zahl $L \geq 0$ gibt mit

$$|| f(t, u) - f(t, v) || \leq L \cdot || u - v ||$$

für alle $t \in I$ und $u, v \in U$.

Definition 52.9. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Man sagt, dass das Vektorfeld f *lokal* einer *Lipschitz-Bedingung* genügt, wenn es zu jedem Punkt $(t, v) \in I \times U$ eine offene Umgebung

$$(t, v) \in I' \times U' \subseteq I \times U$$

gibt derart, dass das auf $I' \times U'$ eingeschränkte Vektorfeld einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Die folgende Aussage liefert ein wichtiges und leicht überprüfbares hinreichendes Kriterium, wann ein Vektorfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 52.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v_1, \ldots, v_n) \longmapsto f(t, v_1, \ldots, v_n),$$

ein Vektorfeld auf U derart, dass die partiellen Ableitungen nach v_j existieren und stetig sind. Dann genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Beweis. Sei $P = (t, v) = (t, v_1, \ldots, v_n)$ ein Punkt in $I \times U$ und sei

$$U(t, \epsilon) \times U(v, \epsilon)$$

eine offene Umgebung von P innerhalb von $I \times U$ derart, dass auch

$$B = B(t, \epsilon) \times B(v, \epsilon) \subseteq I \times U$$

ist. Dieses B ist eine abgeschlossene Umgebung von P und daher kompakt. Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial v_j}$ nach Voraussetzung stetig sind, gibt es nach Satz 22.7 eine gemeinsame Schranke $c \in \mathbb{R}$ mit

$$|| \frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q) || \leq c$$

für alle $Q \in B$. Daher gibt es für die Matrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q))_{1 \leq i,j \leq n}$ eine Schranke L mit

$$|| (\frac{\partial f_i}{\partial v_j}(Q))_{1 \leq i,j \leq n} || \leq L.$$

Man kann daher zu jedem festen Zeitpunkt $s \in U(t, \epsilon)$ Lemma 49.3 anwenden und erhält für $u, u' \in U(v, \epsilon)$ die Abschätzung

$$|| f(s, u) - f(s, u') || \leq L \cdot || u - u' || .$$

□

53. Picard-Lindelöf

In dieser Vorlesung werden wir wesentliche Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf bereit stellen und ihn anschließend beweisen.

53.1. Supremumsnorm und Abbildungsräume.

Wir erinnern an die Definition der Supremumsnorm.

Es sei T eine Menge und

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$|| f || := || f ||_T = \sup (| f(x) |, x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f. Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞.

Diese Definition kann man direkt verallgemeinern, wenn die Werte der Abbildungen in einem euklidischen Vektorraum liegen. Es sei also T eine Menge und E sei ein euklidischer Vektorraum. In dieser Situation definiert man zu einer Abbildung

$$f : T \longrightarrow E$$

$$\| f \| := \| f \|_T = \sup (\| f(x) \|, x \in T)$$

und nennt dies das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f (falls das Supremum nicht existiert, ist dies als ∞ zu interpretieren).

Wir setzen $M = \mathrm{Abb}(T, E)$; dies ist ein (i.A. unendlichdimensionaler) reeller Vektorraum. Die Supremumsnorm erfüllt die folgenden Eigenschaften.

(1) $\| f \| \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $\| f \| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt

$$\| \lambda f \| = | \lambda | \cdot \| f \| \ .$$

(4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\| g + f \| \leq \| g \| + \| f \| \ .$$

Wenn T ein metrischer Raum ist, so betrachtet man

$$C = \{ f : T \to E | \, f \text{ stetig} \} \, .$$

Dieser ist ein reeller Untervektorraum von M. Wenn $T \subseteq \mathbb{R}^k$ nichtleer, abgeschlossen und beschränkt ist, so ist nach Satz 22.7 das Supremum von $\| f(x) \|$, $x \in T$, gleich dem Maximum, d.h. es gibt ein $x \in T$ derart, dass $\| f(x') \| \leq \| f(x) \|$ für alle $x' \in T$ gilt. Daher ist in diesem Fall das Supremum stets eine reelle Zahl, und stimmt mit dem Maximum überein. Man spricht daher auch von der *Maximumsnorm*.

Satz 53.1. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Teilmenge, es sei E ein euklidischer Vektorraum und es sei*

$$C = C(T, E)$$

die Vektorraum der stetigen Abbildungen von T nach E. Dann ist C, versehen mit der Maximumsnorm, ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Es sei

$$f_n : T \longrightarrow E$$

eine Cauchy-Folge von stetigen Abbildungen. Wir müssen zeigen, dass diese Folge gegen eine Grenzabbildung konvergiert, die ebenfalls stetig ist. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$\| f_n(x) - f_m(x) \| \leq \epsilon$$

für alle $x \in T$ gilt. Daher ist für jedes $x \in T$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in E und daher, wegen der Vollständigkeit von euklidischen Räumen, konvergent in E. Wir nennen den Grenzwert dieser Folge $f(x)$, so dass sich insgesamt eine Grenzabbildung

$$f : T \longrightarrow E,\ x \longmapsto f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

ergibt, gegen die die Funktionenfolge punktweise konvergiert. Da es zu einem vorgegebenem $\epsilon > 0$ stets ein n_0 gibt derart, dass die Cauchy-Bedingung für alle $x \in T$ gilt, konvergiert die Funktionenfolge sogar gleichmäßig gegen f (und das bedeutet die Konvergenz in der Supremumsnorm). Aufgrund von Satz 22.11 ist daher f stetig und daher ist $f \in C$. □

53.2. **Integration von stetigen Wegen.**

Für eine stetige Kurve

$$g : I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für $a, b \in I$ das *Integral* $\int_a^b g(s)ds$ komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen $g_1, \ldots, g_n$ aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s)ds := (\int_a^b g_1(s)ds)v_1 + \ldots + (\int_a^b g_n(s)ds)v_n\,.$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in V, der unabhängig von der gewählten Basis ist. Wenn man die untere Intervallgrenze a fixiert und die obere Intervallgrenze $b = t$ variiert, so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V,\ t \longmapsto \int_a^t g(s)\,ds.$$

Diese Integralkurve kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

Satz 53.2. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$g : [a, b] \longrightarrow V$$

eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$|| \int_a^b g(t)\,dt\,|| \leq \int_a^b ||\,g(t)\,||\ dt.$$

Beweis. Wenn $\int_a^b g(t)\,dt = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t)\,dt \;=\; v \;\neq\; 0.$$

Es sei $u_1 = \frac{v}{||v||}$. Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von V. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Koordinatenfunktionen von g bzgl. dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$\begin{aligned} v &= \int_a^b g(t)\,dt \\ &= (\int_a^b g_1(t)\,dt)u_1 + \ldots + (\int_a^b g_n(t)\,dt)u_n \\ &= (\int_a^b g_1(t)\,dt)u_1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left|\left| \int_a^b g(t)\,dt \right|\right| &= \left|\left| \int_a^b g_1(t)\,dt \right|\right| \\ &\leq \int_a^b ||\, g_1(t)\, ||\ dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \ldots + (g_n(t))^2}\,dt \\ &= \int_a^b ||\, g_1(t)u_1 + \ldots + g_n(t)u_n \,||\ dt \\ &= \int_a^b ||\, g(t)\, ||\ dt. \end{aligned}$$

□

53.3. **Differential- und Integralgleichungen.**

Mit dem Begriff des Integrals einer Kurve kann man Differentialgleichungen auch als Integralgleichungen schreiben.

Lemma 53.3. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U. Es sei $(t_0, w) \in I \times U$ vorgegeben. Dann ist eine stetige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V,\ t \longmapsto v(t),$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $t_0 \in J$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,,$$

wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^t f(s, v(s))\,ds$$

erfüllt.

Beweis. Sei die Integralbedingung erfüllt. Dann ist $v(t_0) = w$ und aufgrund des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung gilt $v'(t) = f(t, v(t))$. Insbesondere sichert die Integralbedingung, dass v differenzierbar ist.Wenn umgekehrt v eine Lösung des Anfangswertproblems ist, so ist $v'(s) = f(s, v(s))$ und daher

$$w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds \;=\; w + \int_{t_0}^{t} v'(s)\, ds \;=\; w + v(t) - v(t_0) \;=\; v(t).$$

□

53.4. **Der Satz von Picard-Lindelöf.**

Wir kommen nun zum wichtigsten Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Satz 53.4. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld auf U. Es sei vorausgesetzt, dass dieses Vektorfeld stetig sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(t_0, w) \in I \times U$ ein offenes Intervall J mit $t_0 \in J \subseteq I$ derart, dass auf diesem Intervall eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

existiert.

Beweis. Nach Lemma 53.3 ist eine stetige Abbildung

$$v : J \longrightarrow V$$

eine Lösung des Anfangswertproblems genau dann, wenn v die Integralgleichung

$$v(t) = w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))\, ds$$

erfüllt. Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für diese Integralgleichung unter Verwendung des Banachschen Fixpunktsatzes dadurch erweisen, dass wir für die Abbildung (man spricht von einem *Funktional*)

$$\psi \longmapsto (t \mapsto w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s))\, ds)$$

einen Fixpunkt finden. Hierbei stehen links und rechts Abbildungen in t (aus einem gewissen Teilintervall von I mit Werten in V.) mit Werten in V. Um den Fixpunktsatz anwenden zu können müssen wir ein Definitionsintervall festlegen, und eine Metrik auf dem Abbildungsraum nach V definieren, diesen metrischen Raum dann als vollständig und das Funktional als stark kontrahierend nachweisen. Aufgrund der Voraussetzung über die lokale Lipschitz-Bedingung gibt es eine offene Umgebung

$$(t_0, w) \in J' \times U(w, \epsilon) \subseteq I \times U$$

und ein $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|| f(t,v) - f(t,\tilde{v}) || \leq L \, || v - \tilde{v} || \; \text{ für alle } t \in J' \text{ und } v, \tilde{v} \in U(w,\epsilon) \, .$$

Durch Verkleinern der Radien können wir annehmen, dass der Abschluss von $J' \times U(w,\epsilon)$, also das Produkt des abgeschlossenen Intervalls mit der abgeschlossenen Kugel, ebenfalls in $I \times U$ liegt. Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $M \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|| f(t,v) || \leq M \text{ für alle } (t,v) \in J' \times U(w,\epsilon)$$

(da diese Beschränktheit auf dem Abschluss gilt). Wir ersetzen nun J' durch ein kleineres Intervall $J = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq J'$ mit $\delta > 0$, $\delta \leq \epsilon/M$ und $\delta \leq 1/2L$. Wir betrachten nun die Menge der stetigen Abbildungen[9]

$$\begin{aligned} C &= \{\psi : J \to V | \, \psi \text{ stetig}, || \psi(t) - w || \leq \epsilon \text{ für alle } t \in J\} \\ &= \{\psi : J \to V | \, \psi \text{ stetig}, || \psi - w || \leq \epsilon\}. \end{aligned}$$

Dabei wird also C mit der Maximumsnorm auf J versehen. Dieser Raum ist nach Satz 53.1 und nach Aufgabe 49.12 wieder ein vollständiger metrischer Raum. Wir betrachten nun auf diesem konstruierten Intervall J bzw. der zugehörigen Menge C die Abbildung

$$H : C \longrightarrow C, \, \psi \longmapsto H(\psi) = (t \mapsto w + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s)) \, ds).$$

Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass $H(\psi)$ wieder zu C gehört. Für $t \in J$ ist aber nach Satz 53.2

$$\begin{aligned} || H(\psi)(t) - w || &= || \int_{t_0}^{t} f(s,\psi(s)) \, ds || \\ &\leq | \int_{t_0}^{t} || f(s,\psi(s)) || \; ds | \\ &\leq | t - t_0 | \, M \\ &\leq \frac{\epsilon}{M} M \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

und $H(\psi)$ ist stetig, da es durch ein Integral definiert wird. Zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft seien $\psi_1, \psi_2 \in C$ gegeben. Für ein $t \in J$ ist

$$\begin{aligned} || H(\psi_1)(t) - H(\psi_2)(t) || &= || \int_{t_0}^{t} f(s,\psi_1(s)) \, ds - \int_{t_0}^{t} f(s,\psi_2(s)) \, ds || \\ &= || \int_{t_0}^{t} (f(s,\psi_1(s)) - f(s,\psi_2(s))) \, ds || \\ &\leq | \int_{t_0}^{t} || f(s,\psi_1(s)) - f(s,\psi_2(s)) || \; ds | \\ &\leq | \int_{t_0}^{t} L \, || \psi_1(s) - \psi_2(s) || \; ds | \end{aligned}$$

[9]Dabei fassen wir $w \in U$ als konstante Abbildung $J \to U$ auf.

$$\begin{aligned}
&= L\cdot \left| \int_{t_0}^{t} ||\,\psi_1(s) - \psi_2(s)\,||\ ds \right| \\
&\leq L\cdot \left| \int_{t_0}^{t} ||\,\psi_1 - \psi_2\,||\ ds \right| \\
&\leq L\,|\,t - t_0\,| \cdot ||\,\psi_1 - \psi_2\,|| \\
&\leq \frac{1}{2}\,||\,\psi_1 - \psi_2\,||\,.
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $t \in J$ gilt, folgt aus dieser Abschätzung direkt

$$||\,H(\psi_1) - H(\psi_2)\,|| \leq \frac{1}{2}\,||\,\psi_1 - \psi_2\,||,$$

d.h. es liegt eine starke Kontraktion vor. Daher besitzt H ein eindeutiges Fixelement $\psi \in C$, und diese Abbildung löst die Differentialgleichung. Dies gilt dann erst recht auf jedem offenen Teilintervall von J. Damit haben wir insbesondere bewiesen, dass es in C nur eine Lösung geben kann, wir wollen aber generell auf dem Intervall J Eindeutigkeit erhalten. Für eine Lösung $v : J \to V$ gilt aber wegen der Integralbeziehung wieder

$$v(t) \;=\; w + \int_{t_0}^{t} f(s, v(s))ds$$

und die gleichen Abschätzungen wie weiter oben zeigen, dass die Lösung zu C gehören muss. □

54. Gradientenfelder

54.1. **Zur Eindeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen.**

Satz 54.1. *Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall, $U \subseteq V$ eine offene Menge und*

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein stetiges Vektorfeld auf U, das lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $J \subseteq I$ offen und es seien

$$v_1, v_2 : J \longrightarrow V$$

Lösungen des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w\,.$$

Dann ist $v_1 = v_2$.

Beweis. Wir betrachten die Menge

$$M = \{t \in J |\, v_1(t) = v_2(t)\}\,.$$

Wegen $t_0 \in M$ ist diese Menge nicht leer. Zu jedem Punkt $t \in I$ gibt es nach Satz 53.4 eine offene Intervallumgebung $t \in J'$, worauf es zu gegebener Anfangsbedingung $v(t) = v_0$ genau eine Lösung der Differentialgleichung gibt. Wenn $t \in M$ ist, so ist $v_1(t) = v_2(t)$ und daher stimmen v_1 und v_2 in einer offenen Umgebung $t \in J'$ mit der eindeutigen Lösung und damit untereinander überein. Also ist $J' \subseteq M$. Dies bedeutet, dass M eine offene Teilmenge von J ist. Andererseits sind v_1 und v_2 stetig und daher ist nach Aufgabe 54.1 die Menge M auch abgeschlossen in M. Da ein Intervall nach Satz 21.2 zusammenhängend ist, folgt $M = J$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Lipschitz-Bedingung die Lösung eines Anfangswertproblems nicht eindeutig bestimmt ist.

Beispiel 54.2. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$v' = 3v^{2/3} \text{ mit } v(0) = 0$$

zum zeitunabhängigen Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Offensichtlich gibt es die stationäre Lösung

$$h(t) = 0\,,$$

aber auch

$$g(t) = t^3$$

ist eine Lösung, wie man durch Nachrechnen sofort bestätigt. Aus diesen beiden Lösungen kann man sich noch weitere Lösungen basteln. Seien dazu $a < b$ reelle Zahlen. Dann ist auch

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3 \text{ für } t < a, \\ 0 \text{ für } a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3 \text{ für } t > b, \end{cases}$$

eine Lösung. D.h. es gibt Lösungen, bei denen das Teilchen beliebig lange (im Zeitintervall von a nach b) ruht und danach (und davor) sich bewegt. Sobald sich das Teilchen in einem Punkt $\neq 0$ befindet, ist der Bewegungsablauf lokal eindeutig bestimmt.

Bemerkung 54.3. Zu einem stetigen Vektorfeld

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

kann man sich fragen, ob es ein maximales Definitionsintervall J für die Lösung eines Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(t_0) = w$$

gibt. Dies ist in der Tat der Fall! Man kann nämlich alle Teilmengen

$$J \subseteq I \text{ offen },\ t_0 \in J,\ \text{ es gibt eine Lösung } v_J \text{ auf } J$$

betrachten. Wegen Satz 54.1 stimmen zwei Lösungen v_J und $v_{J'}$ auf dem Durchschnitt $J \cap J'$ überein, und liefern daher eine eindeutige Lösung auf der Vereinigung $J \cup J'$. Daher enthält die Menge der Teilintervalle, auf denen eine Lösung definiert ist, ein maximales Teilintervall J.

Dieses Teilintervall kann kleiner als I sein. Die Grenzen des maximalen Teilintervalls, auf dem eine Lösung definiert ist, heißen auch *Entweichzeiten*.

54.2. **Gradientenfelder.**

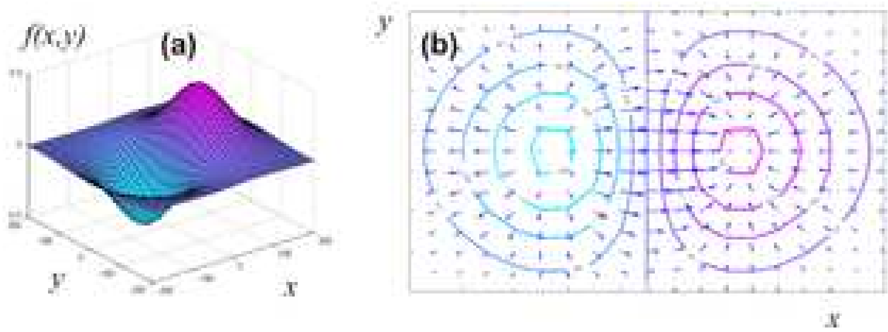
Definition 54.4. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto \text{grad } h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.



Ein Gradientfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion h (manchmal $-h$) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn h zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 52.10 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung senkrecht auf den Fasern von h liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Abstiegs. Wenn h bspw. die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

Lemma 54.5. *Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,*

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und

$$U \longrightarrow V,\ P \longmapsto f(P) = \text{grad } h(P),$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi : J \longrightarrow U$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = f(v)\,.$$

Dann steht $\varphi'(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\varphi(t)}F$ der Faser F von h durch $\varphi(t)$ für alle $t \in J$, für die $\varphi(t)$ reguläre Punkte von h sind.

Beweis. Sei $P = \varphi(t)$ ein regulärer Punkt von h und sei $v \in T_PF$ ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t)\rangle \;=\; \langle v, f(\varphi(t))\rangle \;=\; \langle v, \operatorname{grad}\, h(P)\rangle \;=\; (Dh)_P(v) \;=\; 0.$$

$\square$

Beispiel 54.6. Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto f(x, y) = (y, x).$$

Die Fasern von h sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch $xy = c$ gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) \;=\; (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \;=\; (a \cosh\, t + b \sinh\, t\,, a \sinh\, t + b \cosh\, t\,)$$

mit beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$, wie man direkt nachrechnet. Dabei ist $\varphi(0) = (a, b)$. Für $a = b = 0$ ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabblidung nicht regulär ist. Bei $a = b = 1$ ist $\varphi(t) = (e^t, e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdiagonale (ohne den Nullpunkt), bei $a = b = -1$ ist $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdiagonale, bei $a = 1$ und $b = -1$ ist $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei $a = -1$ und $b = 1$ ist $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen. Ansonsten kann man die Lösungskurven realisieren als

$$(a \cosh\, t\,, a \sinh\, t\,)$$

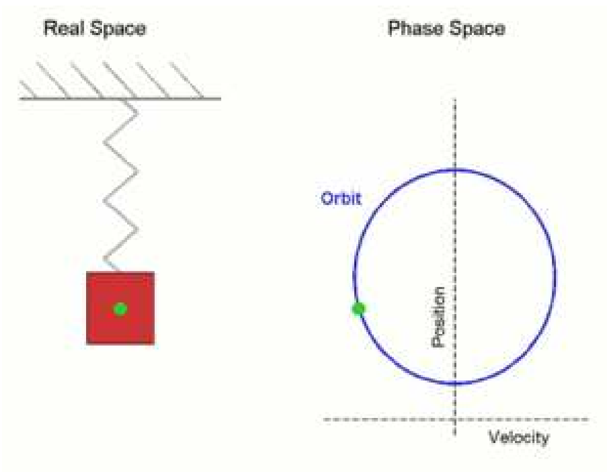
(Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $x-$Achse im Punkt $(a, 0)$), und als

$$(b \sinh\, t\,, b \cosh\, t\,)$$

(Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der $y-$Achse im Punkt $(0, b)$). Die Lösungen erfüllen die Gleichung $x^2(t) - y^2(t) = a^2$ bzw. $x^2(t) - y^2(t) = b^2$.

54.3. **Differentialgleichungen höherer Ordnung.**

Viele physikalische Bewegungsprozesse sind nicht (wie im Fall eines Löwenzahnfallschirmchens, siehe Vorlesung 37) dadurch determiniert, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt die Bewegungsrichtung (also die gerichtete Geschwindigkeit) vorgegeben wird, sondern dadurch, dass zu jedem Zeit- und Ortspunkt eine Kraft auf ein Teilchen wirkt, die dieses beschleunigt. In diesem Fall kann die Bewegung also nicht durch die erste Ableitung (Geschwindigkeit) modelliert werden, sondern durch die zweite Ableitung (Beschleunigung). Typische Beispiele hierzu sind die durch Gravitation oder Federkraft hervorgerufenen Bewegungen.



Definition 54.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man den Ausdruck

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

eine *Differentialgleichung der Ordnung* n.

Unter einer *Lösung einer Differentialgleichung höherer Ordnung* versteht man eine n-mal differenzierbare Funktion

$$y : J \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t)$$

(wobei $J \subseteq I$ ein offenes Teilintervall ist) derart, dass

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

für alle $t \in J$ gilt.

Differentialgleichungen beliebiger Ordnung können unter Inkaufnahme von neuen Variablen auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung zurückgeführt werden.

Lemma 54.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und*

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist die Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

über die Beziehung

$$v_i = y^{(i)}$$

äquivalent zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wenn

$$y : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung höherer Ordnung

$$y^{(n)} = g(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

ist, so sind alle Funktionen $v_i = y^{(i)}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ differenzierbar, und es gilt $v_i' = v_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-2$ nach Definition und

$$\begin{aligned} v_{n-1}'(t) &= (y^{(n-1)})'(t) \\ &= y^{(n)}(t) \\ &= g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \\ &= g(t, v_0(t), v_1(t), v_2(t), \ldots, v_{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Wenn umgekehrt

$$v : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems zum Vektorfeld

$$\begin{aligned} f : I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (t, v_0, \ldots, v_{n-1}) \longmapsto f(t, v_0, \ldots, v_{n-1})) \\ = (v_1, \ldots, v_{n-1}, g(t, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})) \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich sukzessive aus den ersten $n-1$ Gleichungen, dass $y = v_0$ n-mal differenzierbar ist, und die letzte Gleichung des Differentialgleichungssystems besagt gerade

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)).$$

□

Mit dieser Umformung ist auch klar, wie sinnvolle Anfangsbedingungen für eine Differentialgleichung höherer Ordnung aussehen. Man muss nicht nur einen Startwert $y(t_0) = w_0$, sondern auch die höheren Ableitungen $y'(t_0) = w_1$, $y''(t_0) = w_2$, usw. festlegen.

55. Trigonalisierbarkeit

55.1. Lineare Differentialgleichungssysteme.

Definition 55.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (t,v) \longmapsto f(t,v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt $t \in I$ eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \dots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \dots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Für lineare Differentialgleichungen gibt es wieder eine inhomogene Variante.

Definition 55.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij} : I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.* Die Abbildung z heißt dabei *Störabbildung.*

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \ldots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \ldots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen a_{ij} und z_i ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare Differentialgleichungen zurückführen und dadurch lösen.

Lemma 55.3. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ und $z_i : I \to \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n \ (t_0 \in I)$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n\,,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1\,n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1\,n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1}\,,$$

$$v_{n-2}' = a_{n-2\,n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2\,n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2\,n}(t)v_{n-1}(t) + z_{n-2}(t)$$

$$\text{mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1\,,$$

löst.

Beweis. Das ist trivial. □

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

55.2. **Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.**

Falls die Funktionen a_{ij} alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen

Definition 55.4. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.*

Definition 55.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist und

$$z : I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem.*

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

55.3. **Trigonalisierbare lineare Abbildungen.**

Um die Lösungstheorie für Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu entwickeln, müssen wir über trigonalisierbare lineare Abbildungen sprechen, einem wichtigen Kapitel der linearen Algebra, das zur Eigenraumtheorie gehört.

Eine Fahne setzt sich aus dem Fußpunkt, der Fahnenstange, dem Fahnentuch und dem Raum, in dem das Tuch weht, zusammen.

Definition 55.6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Dann heißt eine Kette von Untervektorräumen

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine *Fahne* in V.

Definition 55.7. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Untervektorraum $U \subseteq V$ *φ-invariant*, wenn

$$\varphi(U) \subseteq U$$

gilt.

Definition 55.8. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und

$$f : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Eine Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

heißt *f-invariant*, wenn $f(V_i) \subseteq V_i$ ist für alle $i = 0, 1, \ldots, n-1, n$.

Definition 55.9. Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und

$$f : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißtf *trigonalisierbar*, wenn V eine f-invariante Fahne besitzt.

Satz 55.10. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist trigonalisierbar.*
(2) *Die Abbildung φ wird bzgl. einer geeigneten Basis durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben.*
(3) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren.*

Wenn φ bzgl. einer Basis durch die Matrix M beschrieben wird, so gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(K)$ derart, dass BMB^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$V_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle .$$

Da es sich dabei um eine φ-invariante Fahne handelt, gilt

$$\varphi(v_i) = b_{1i}v_1 + b_{2i}v_2 + \ldots + b_{ii}v_i .$$

Bzgl. dieser Basis besitzt die beschreibende Matrix zu φ obere Dreiecksgestalt. (2) $\Rightarrow$ (3). Das charakteristische Polynom von φ ist gleich dem charakteristischen Polynom χ_M, wobei M eine beschreibende Matrix bzgl. einer beliebigen Basis ist. Wir können also eine obere Dreiecksmatrix nehmen, und daher ist nach Lemma 14.8 das charakteristische Polynom das Produkt der Linearfaktoren zu den Diagonaleinträgen. (3) $\Rightarrow$ (1). Induktion nach n, für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei nun $n \geq 1$ und sei die Aussage für alle Endomorphismen auf Vektorräumen der Dimension $< n$ schon bewiesen. Es sei λ_1 eine Nullstelle von $P = \chi_\varphi$. Dann gibt es nach Satz 17.8 einen Eigenvektor $v_1 \in V$ zum Eigenwert λ_1. Es sei $u_2, \ldots, u_n$ eine Ergänzung von v_1 zu einer Basis von V. Wir setzen $U = \langle u_2, \ldots, u_n \rangle$, dies ist ein $(n-1)$-dimensionaler Untervektorraum. Es ist

$$\varphi(u_i) = a_i v_1 + b_{2i}u_2 + \ldots + b_{ni}u_n .$$

Durch die Festlegung

$$g(u_i) = a_i v_1 \in V$$

erhalten wir eine lineare Abbildung

$$g : U \longrightarrow V,$$

und durch die Festlegung

$$h(u_i) = b_{i2}u_2 + \ldots + b_{in}u_n$$

erhalten wir eine lineare Abbildung

$$h : U \longrightarrow U.$$

Mit diesen Abbildungen gilt

$$\varphi(u) = g(u) + h(u)$$

für $u \in U$, da dies für die Basis gilt. In der Basis $v_1, u_2, \ldots, u_n$ besitzt φ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} .$$

Die Teilmatrix N rechts unten ist dabei die beschreibende Matrix von h. Für das charakteristische Polynom gilt die Beziehung

$$\chi_M = (X - \lambda_1)\chi_N\,,$$

so dass nach Lemma 17.4 auch $\chi_N = \chi_h$ in Linearfaktoren zerfällt. Wir können also auf $h : U \to U$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. D.h. es gibt eine h-invariante Fahne

$$0 = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_{n-2} \subset U_{n-1} = U\,.$$

Damit definieren wir $V_{i+1} = Kv_1 + U_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und erhalten die Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V\,.$$

Diese Fahne ist f-invariant. Dies ist für V_1 klar, da dies ein Eigenraum ist. Ansonsten gilt für $v \in V_i$ mit $v = cv_1 + u$ mit $u \in U_i$ die Beziehung

$$\varphi(cv_1 + u) \;=\; c\lambda v_1 + \varphi(u) \;=\; c\lambda v_1 + g(u) + h(u) \;=\; (c\lambda + a)v_1 + h(u),$$

und dies gehört zu V_i.

Der Zusatz ergibt sich wie folgt.Die trigonalisierbare Abbildung φ werde bzgl. der Basis $\mathfrak{u}$ durch die Matrix M beschrieben, und bzgl. der Basis $\mathfrak{v}$ durch die obere Dreiecksmatrix D. Dann gilt nach Korollar 13.11 die Beziehung $T = BMB^{-1}$, wobei B den Basiswechsel beschreibt. □

Korollar 55.11. *Es sei $M \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit komplexen Einträgen. Dann ist M trigonalisierbar.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 55.10 und dem Fundamentalsatz der Algebra. □

56. Lineare Differentialgleichungssysteme

56.1. **Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.**

Es sei eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gegeben, d.h.

$$v' = Mv$$

mit einer konstanten Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} \in \mathbb{K}\,.$$

Wir lassen hier also auch den Fall zu, dass die Einträge komplexe Zahlen sind. Beim Auffinden der Lösungen zu einer reellen Matrix ist es nämlich hilfreich, die reellen Zahlen als komplexe Zahlen aufzufassen, um dort Umformungen durchzuführen, die im Reellen nicht möglich sind. Die Lösungen werden aber nach wie vor auf reellen Intervallen definiert sein.

Ausgeschrieben liegt also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n \end{pmatrix}$$

vor. Solche Systeme lassen sich mit Hilfe der linearen Algebra auf ein System von voneinander unabhängigen inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen und damit lösen. Das folgende einfache Lemma gibt bereits einen deutlichen Hinweis dadrauf, dass lineare Eigenschaften der Matrix M eng mit den Lösungen des Differentialgleichungssystems zusammenhängen.

Lemma 56.1. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und es sei $u \in \mathbb{K}^n$ ein Eigenvektor zu M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ t \longmapsto ce^{\lambda t}u = c \begin{pmatrix} e^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}u_n \end{pmatrix},$$

($c \in \mathbb{K}$) eine Lösung dieses Differentialgleichungssystems.

Beweis. Dies folgt direkt wegen

$$\begin{aligned} v'(t) &= \begin{pmatrix} ce^{\lambda t}u_1 \\ \vdots \\ ce^{\lambda t}u_n \end{pmatrix}' \\ &= \begin{pmatrix} (ce^{\lambda t}u_1)' \\ \vdots \\ (ce^{\lambda t}u_n)' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \lambda c e^{\lambda t} u_1 \\ \vdots \\ \lambda c e^{\lambda t} u_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda c e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\
&= M(c e^{\lambda t} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}) \\
&= M \begin{pmatrix} c e^{\lambda t} u_1 \\ \vdots \\ c e^{\lambda t} u_n \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

□

Nun untersuchen wir systematisch, wie man Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten löst.

Lemma 56.2. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, es sei $B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$ *eine invertierbare Matrix und es sei*

$$N = BMB^{-1} .$$

Dann ist

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n ,\, t \longmapsto v(t),$$

genau dann eine Lösung von $v' = Mv$*, wenn* $w = Bv$ *eine Lösung der Differentialgleichung* $w' = Nw$ *ist.*

Beweis. Es sei vorrausgesetzt, dass $v' = Mv$ ist. Dann gelten für $w = Bv$ mit $B = (b_{ij})_{ij}$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
w'(t) &= \begin{pmatrix} w_1'(t) \\ \vdots \\ w_n'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (b_{11} v_1(t) + \ldots + b_{1n} v_n(t))' \\ \vdots \\ (b_{n1} v_1(t) + \ldots + b_{nn} v_n(t))' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} v_1'(t) + \ldots + b_{1n} v_n'(t) \\ \vdots \\ b_{n1} v_1'(t) + \ldots + b_{nn} v_n'(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= B \begin{pmatrix} v_1'(t) \\ \vdots \\ v_n'(t) \end{pmatrix}$$

$$= BM \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= BMB^{-1} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix},$$

so dass w die Differentialgleichung $w' = Nw$ löst. Die inverse Transformation zeigt, dass zu einer Lösung von $w' = Nw$ die Abbildung $B^{-1}w$ eine Lösung für $v' = Mv$ ist. □

Satz 56.3. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$$

eine homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ *derart, dass das äquivalente Differentialgleichungssystem*

$$w' = Nw \text{ mit } N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt, also von der Form

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \\ \vdots \\ w_{n-1}' \\ w_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \ddots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$$

(mit $c_{ij} \in \mathbb{C}$*) ist. Dieses System lässt sich sukzessive von unten nach oben mit dem Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichungen in einer Variablen lösen. Wenn zusätzlich Anfangsbedingungen* $v_i(t_0) = a_i$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *gegeben sind, so ist die Lösung eindeutig.*

Beweis. Aufgrund von Korollar 55.11 ist die Matrix M trigonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ derart, dass

$$N = BMB^{-1}$$

obere Dreiecksgestalt besitzt. Das lineare Differentialgleichungssystem $w' = Nw$ besitzt also die angegebene Gestalt, und es ist wegen Lemma 56.2 äquivalent zum ursprünglichen System. Die letzte Zeile des neuen Systems, also

$$w_n' = c_{nn} w_n,$$

ist eine lineare Differentialgleichung in einer Variablen, ihre Lösungen sind $w_n(t) = ae^{c_{nn}t}$. Die zweitletzte Zeile ist

$$w'_{n-1} = c_{n-1\,n-1}w_{n-1} + c_{n-1\,n}w_n\,,$$

worin man die Lösung für w_n einsetzen kann. Dann erhält man eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung in der einen Variablen w_{n-1}, die man mit dem angegebenen Lösungsverfahren lösen kann. Für die drittletzte Zeile sind dann w_{n-1} und w_n schon bekannt und dies führt wieder zu einer inhomogenen linearen Differentialgleichung für w_{n-2}. So erhält man sukzessive eine Gesamtlösung $(w_1, \ldots, w_n)$. Eine Anfangsbedingung für $v' = Mv$ übersetzt sich direkt in eine Anfangsbedingung für $w' = Nw$. In dem soeben beschriebenen Lösungsverfahren gibt es dann jeweils eine Anfangsbedingung für die inhomogenen Differentialgleichungen, so dass die Lösungen jeweils eindeutig sind. □

Satz 56.4. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit der Anfangsbedingung $v(t_0) = u \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$. *Dann gibt es genau eine auf* $\mathbb{R}$ *definierte Lösung*

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

für dieses Anfangswertproblem.

Beweis. Aufgrund von Satz 56.3 gibt es eine eindeutige komplexwertige Lösung

$$v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

für dieses Differentialgleichungssystem. Da eine reellwertige Lösung insbesondere eine komplexwertige Lösung ist, liegt Eindeutigkeit vor. Der Realteil der komplexen Lösung, also

$$\mathrm{Re}\,(v) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto \mathrm{Re}\,(v(t)),$$

ist ebenfalls eine Lösung dieses Systems. Wegen der Eindeutigkeit muss $v = \mathrm{Re}\,(v)$ sein. □

Korollar 56.5. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

eine homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann ist die Menge der Lösungen

$$\varphi : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

ein n*-dimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

Beweis. Dass der Lösungsraum ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist kann man direkt nachrechnen. Aufgrund von Satz 56.3 bzw. Satz 56.4 gibt es zu jedem Vektor

$$w \in \mathbb{K}^n$$

genau eine Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

mit $\varphi(0) = w$. Die Zuordnung, die einen Anfangswert w auf die Lösung zu diesem Anfangswertproblem abbildet, ist linear, so dass eine lineare Isomorphie zwischen $\mathbb{K}^n$ und dem Lösungsraum vorliegt. □

Definition 56.6. Es sei

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Dann heißt eine Basis des Lösungsraumes ein *Fundamentalsystem von Lösungen* dieses Systems.

Korollar 56.7. *Es sei*

$$v' = Mv$$

mit

$$M \in \operatorname{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Matrix M sei diagonalisierbar mit den Eigenvektoren $u_1, \ldots, u_n$. Dann ist der Lösungsraum der Differentialgleichung gleich

$$\{c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot u_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} \cdot u_n | \, c_i \in \mathbb{K}\},$$

wobei λ_i der Eigenwert zu u_i ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 56.1 und aus Korollar 56.5. □

Beispiel 56.8. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Für $v_2(t) = 0$ ergibt sich aus der ersten Zeile (bis auf skalare Vielfache) sofort $v_1 = e^{\lambda t}$, was insgesamt der Lösung

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

zum Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gemäß Satz 56.1 entspricht.

Sei nun $v_2 \neq 0$. Dann führt die zweite Zeile zu $v_2 = e^{\mu t}$, was wir Satz 56.3 entsprechend zu einer Gesamtlösung fortsetzen. Die erste Zeile lautet somit

$$v_1' = \lambda v_1 + \gamma e^{\mu t}.$$

Die Lösung des zugehörigen homogenen Gleichung ist $c \cdot e^{\lambda t}$, so dass sich mit der Variation der Konstanten der Ansatz $v_1(t) = c(t) \cdot e^{\lambda t}$ mit

$$c'(t) \;=\; \gamma \cdot e^{\mu t} \cdot e^{-\lambda t} \;=\; \gamma \cdot e^{(\mu-\lambda)t}$$

ergibt.

Bei $\mu = \lambda$ ergibt sich $c(t) = \gamma t$ und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \gamma t e^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix} .$$

Bei $\gamma \neq 0$ gehört diese zweite Lösung nicht zu einem Eigenvektor.

Bei $\mu \neq \lambda$ ergibt sich $c(t) = \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{(\mu-\lambda)t}$ und damit die zweite Fundamentallösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} e^{\mu t} \\ e^{\mu t} \end{pmatrix} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu-\lambda} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dies ist wieder eine Lösung, die zu einem Eigenvektor gehört.

Beispiel 56.9. Wir betrachten die Bewegung eines Punktes auf der Geraden, wobei die Lage des Punktes proportional zur auf ihn wirkenden Kraft (bzw. Beschleunigung)) in Richtung des Nullpunkts sein soll. Wenn der Punkt sich in $\mathbb{R}_+$ befindet und sich in die positive Rechtung bewegt, so wirkt diese Kraft bremsend, wenn er sich in die negative Richtung bewegt, so wirkt die Kraft beschleunigend. Mit der Proportionalitätskonstante 1 gelangt man zur linearen Differentialgleichung (zweiter Ordnung)

$$y'' = -y \,,$$

die diesen Bewegungsvorgang beschreibt. Als Anfangsbedingung wählen wir $y(0) = 0$ und $y'(0) = v$, zum Zeitpunkt 0 soll die Bewegung also durch den Nullpunkt gehen und dort die Geschwindigkeit v besitzen. Man kann sofort die Lösung

$$y(t) = v \cdot \sin t$$

angeben. Wir werden diese Lösung mit den Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen herleiten. Die Differentialgleichung führt zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} .$$

Das charakteristische Polynom ist

$$y^2 + 1 \;=\; (y - i)(y + i),$$

und Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert i) und $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ (zum Eigenwert $-i$). Die allgemeine komplexe Lösungen ist also nach Korollar 56.7 gleich

$$y_0(t) = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} ,$$

wobei letztlich nur die erste Zeile interessiert. Die Anfangsbedingung führt zu

$$c_1 + c_2 = 0 \text{ und } c_1 i - c_2 i = v\,.$$

Also ist $c_2 = -c_1$ und $c_1 = \frac{v}{2i}$. Daher ist die Lösung

$$\frac{v}{2i} e^{it} - \frac{v}{2i} e^{-it} = v \cdot \sin t$$

nach Satz 25.11.

Arbeitsblätter

31. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 31.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3, +4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t) = \begin{cases} 5, \text{ falls } -3 \leq t \leq -2\,, \\ -3, \text{ falls } -2 < t \leq -1\,, \\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1 < t < -\frac{1}{2}\,, \\ 13, \text{ falls } t = -\frac{1}{2}\,, \\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2} < t < e\,, \\ 0, \text{ falls } e \leq t \leq 3\,, \\ 1, \text{ falls } 3 < t \leq 4\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 31.2. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.3. Es seien

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch

(1) $f + g$,
(2) $f \cdot g$,
(3) $\max(f, g)$,
(4) $\min(f, g)$,

Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 31.4. Es sei
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Treppenfunktion und
$$g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion mit $f([a, b]) \subseteq [c, d]$. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.5. Bestimme das bestimmte Integral
$$\int_0^1 t\,dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.6. Bestimme das bestimmte Integral
$$\int_1^2 t^3\,dt$$
explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.7. Beweise durch Induktion die folgende Formel.
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

Aufgabe 31.8. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \le f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \ge f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$
gilt.

Aufgabe 31.9. Sei I ein kompaktes Intervall und sei
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Aufgabe 31.10. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 31.11. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$$

gilt.

Zu versteuerndes Einkommen	2009			2010		
	Steuerbetrag	Steuersatz	Grenzsteuersatz	Steuerbetrag	Steuersatz	Grenzsteuersatz
8.000 €	23 €	0,3%	14,3%	- €	0,0%	0,2%
8.500 €	97 €	1,1%	15,3%	71 €	0,8%	14,3%
9.000 €	176 €	2,0%	16,2%	148 €	1,6%	15,8%
9.500 €	259 €	2,7%	17,1%	229 €	2,4%	16,7%
10.000 €	347 €	3,5%	18,1%	315 €	3,2%	17,6%
10.500 €	440 €	4,2%	19,0%	406 €	3,9%	18,8%
11.000 €	537 €	4,9%	20,0%	501 €	4,6%	19,5%
11.500 €	639 €	5,6%	20,9%	600 €	5,2%	20,4%
12.000 €	746 €	6,2%	21,8%	705 €	5,9%	21,3%
12.500 €	857 €	6,9%	22,8%	813 €	6,5%	22,2%
13.000 €	974 €	7,5%	23,7%	927 €	7,1%	23,1%
14.000 €	1.215 €	8,7%	24,4%	1.165 €	8,3%	24,2%
15.000 €	1.462 €	9,7%	24,8%	1.410 €	9,4%	24,7%
16.000 €	1.711 €	10,7%	25,3%	1.659 €	10,4%	25,1%
17.000 €	1.966 €	11,6%	25,7%	1.912 €	11,2%	25,6%
18.000 €	2.225 €	12,4%	26,2%	2.171 €	12,1%	26,0%
19.000 €	2.490 €	13,1%	26,6%	2.433 €	12,8%	26,5%
20.000 €	2.758 €	13,8%	27,1%	2.701 €	13,5%	27,0%
21.000 €	3.032 €	14,4%	27,6%	2.972 €	14,2%	27,4%
22.000 €	3.309 €	15,0%	28,0%	3.249 €	14,8%	27,9%
23.000 €	3.590 €	15,6%	28,5%	3.530 €	15,3%	28,3%
24.000 €	3.879 €	16,2%	28,9%	3.815 €	15,9%	28,8%
26.000 €	4.466 €	17,2%	29,8%	4.400 €	16,9%	29,7%
28.000 €	5.072 €	18,1%	30,7%	5.004 €	17,9%	30,6%
30.000 €	5.696 €	19,0%	31,6%	5.625 €	18,8%	31,5%
32.000 €	6.338 €	19,8%	32,6%	6.266 €	19,6%	32,4%
34.000 €	6.998 €	20,6%	33,5%	6.923 €	20,4%	33,4%
36.000 €	7.677 €	21,3%	34,4%	7.599 €	21,1%	34,3%
38.000 €	8.373 €	22,0%	35,2%	8.294 €	21,8%	35,2%
40.000 €	9.088 €	22,7%	36,2%	9.007 €	22,5%	36,1%
42.000 €	9.821 €	23,4%	37,1%	9.738 €	23,2%	37,0%
44.000 €	10.573 €	24,0%	38,0%	10.488 €	23,8%	37,9%
46.000 €	11.343 €	24,7%	38,9%	11.256 €	24,5%	38,9%
48.000 €	12.130 €	25,3%	39,8%	12.042 €	25,1%	39,8%
50.000 €	12.936 €	25,9%	40,8%	12.847 €	25,7%	40,7%
52.000 €	13.761 €	26,5%	41,7%	13.669 €	26,3%	41,6%
54.000 €	14.616 €	27,1%	42,0%	14.509 €	26,9%	42,0%
56.000 €	15.456 €	27,6%	42,0%	15.348 €	27,4%	42,0%
58.000 €	16.296 €	28,1%	42,0%	16.188 €	27,9%	42,0%
60.000 €	17.136 €	28,6%	42,0%	17.028 €	28,4%	42,0%
64.000 €	18.816 €	29,4%	42,0%	18.708 €	29,2%	42,0%
68.000 €	20.496 €	30,1%	42,0%	20.388 €	30,0%	42,0%
72.000 €	22.176 €	30,8%	42,0%	22.068 €	30,7%	42,0%
76.000 €	23.856 €	31,4%	42,0%	23.748 €	31,2%	42,0%
80.000 €	25.536 €	31,9%	42,0%	25.428 €	31,8%	42,0%

Aufgabe 31.12. Bringe die Begriffe *Steuersatz* und *Grenzsteuersatz* mit Treppenfunktionen und Treppenintegralen in Verbindung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 31.13. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und einer Treppenfunktion

$$g : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ derart, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 31.14. (4 Punkte)

Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 31.15. (3 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2 \, dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.16. (5 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^{7} -t^3 + 3t^2 - 2t + 5 \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.17. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 31.18. (6 Punkte)
Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Aufgabe 31.19. (8 Punkte)
Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 31.20. (5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist, dass es aber keine Treppenfunktion s mit der Eigenschaft gibt, dass $|\, s(t) - f(t)\, | \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in [0,1]$ ist.

Aufgabe 31.21. (6 Punkte)
Es sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

32. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 32.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}\, dx\,.$$

Aufgabe 32.2. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt\,.$$

Aufgabe 32.3. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme die Ableitung davon.

Aufgabe 32.4. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 32.5. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe von Elementen aus dem Intervall $[0,1]$ und $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x) dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 32.6. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx > 0\,.$$

Aufgabe 32.7. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 32.8. Seien
$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx \,.$$
Beweise, dass es ein $x \in [a, b]$ gibt mit $f(x) = g(x)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.9. (3 Punkte)

Es seien
$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a, b]$ gibt mit
$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(s) \int_a^b g(t)\, dt$$

Aufgabe 32.10. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

Aufgabe 32.11. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral
$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x + 1}\, dx \,.$$

Aufgabe 32.12. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion
$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \,.$$

Aufgabe 32.13. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit
$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$
eingeschlossen wird.

Aufgabe 32.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 32.15. (5 Punkte)

Betrachte die durch

$$a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

gegebene Folge. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Verwende Eigenschaften der Wurzelfunktion.)

Aufgabe 32.16. (3 Punkte)

Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgabe 32.17. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

derart, dass es keine (endliche) Zerlegung $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ des Intervalls $[0, 1]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{]a_{i-1}, a_i[}$ stetig sind.

Aufgabe 32.18. (6 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft, dass das Treppenintegral zur maximalen unteren Treppenfunktion zur äquidistanten Unterteilung in

n Teilintervalle größer ist als dasjenige zu $n+1$ Teilintervallen (d.h. mehr Teilungspunkte führen zu einer schlechteren Approximation).

(Ignoriere zuerst die beiden Bedingungen stetig und streng.)

33. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 33.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \, .$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 33.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x \, .$$

Aufgabe 33.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x \, .$$

Aufgabe 33.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} \, .$$

Aufgabe 33.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}} \, .$$

Aufgabe 33.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, .$$

Aufgabe 33.7. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$f(t)(bt+c)$$

Aufgabe 33.8. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 33.5.

Aufgabe 33.9. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 33.10. (4 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\, dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \leq t \leq 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \leq 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \leq 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \leq 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 33.11. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\ .$$

Aufgabe 33.12. (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x\ .$$

Aufgabe 33.13. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1 + 3\sqrt[6]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}}\ .$$

Aufgabe 33.14. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x)\ .$$

Aufgabe 33.15. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$(\ln (1+ \sin x)) \cdot \sin x \, .$$

Aufgabe 33.16. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \, .$$

Aufgabe 33.17. (4 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$f(t)(at^2 + bt + c)$$

Aufgabe 33.18. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$$

eine streng wachsende, bijektive Funktion und

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion.

a) Zeige, dass $f \circ \varphi$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

b) Sei nun φ zusätzlich differenzierbar. Bestätige die Gleichung

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_c^d f(\varphi(s))\varphi'(s)\, ds$$

direkt, ohne Bezug auf die Substitutionsregel.

Aufgabe 33.19. (5 Punkte)

Sei

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Betrachte die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin(t) g(x-t) dt, \; x \in \mathbb{R} \, .$$

Zeige, dass f eine zweite Ableitung besitzt, und dass die folgende Beziehung gilt:

$$f'' + f = g\,.$$

(Mit einer geeigneten Substitution kann man erreichen, dass die Variable x nicht mehr als Argument der Funktion g auftritt. Danach geht es darum, geeignete trigonometrische Formeln anzuwenden.)

Aufgabe 33.20. (3 Punkte)

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zu einer stetig differenzierbaren Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

heißt die Funktion

$$\frac{f'}{f}$$

die *logarithmische Ableitung* von f. Zeige, dass die logarithmische Ableitung einen Gruppenhomomorphismus

$$(C^1(I, \mathbb{R}_+), \cdot) \longrightarrow (C^0(I, \mathbb{R}), +)$$

definiert.

Aufgaben zum Hochladen

Wie im letzten Semester wird es auch in diesem Semester vereinzelt Aufgaben geben, bei denen graphisches Illustrationsmaterial angefertigt werden soll, das das Skript bzw. die Kursseite verschönern soll. Die zu erzielenden Punkte werden am Ende des Semesters gut geschrieben.

Aufgabe 33.21. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die den Mittelwertsatz der Integralrechnung illustriert (mit flächengleichem Rechteck und Durchschnittshöhe).

Aufgabe 33.22. (8 Punkte)

Man schreibe eine Computeranimation, die den Beweis des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung illustriert (mit flächengleichen Rechtecken zu den bestimmten Integralen zur Intervalllänge h.).

Aufgabe 33.23. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die den geometrischen Hintergrund zur Berechnung der Stammfunktion einer Umkehrfunktion illustriert.

34. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 34.1. Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\frac{3X^5+4X^4-2X^2+5X-6}{X^3}$.

Aufgabe 34.2. Es sei K ein Körper und seien $S, Q \in K[X]$ zwei Polynome mit $\operatorname{grad}(Q) \geq 1$. Zeige, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine eindeutige Darstellung

$$S = R_0 + R_1Q + R_2Q^2 + \ldots + R_nQ^n$$

mit Polynomen R_j vom Grad $< \operatorname{grad}(Q)$ gibt.

Aufgabe 34.3. Bestimme die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung in Beispiel 34.6 durch Einsetzen von einigen Zahlen für X.

Aufgabe 34.4. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{X^2(X^2+1)}$.

Aufgabe 34.5. Bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{X^3-1}$.

Aufgabe 34.6. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{X^3(X-1)^3}$.

Aufgabe 34.7. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{X^3+4X^2+7}{X^2-X-2}$.

Aufgabe 34.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2+5}.$$

Aufgabe 34.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2-5}.$$

Aufgabe 34.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{2x^2+x-1}.$$

Aufgabe 34.11. Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und danach partiell integriert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 34.12. (4 Punkte)

Schreibe die rationale Funktion

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{4x + 3}$$

in der neuen Variablen $u = 4x + 3$. Berechne die Stammfunktion über die reelle Partialbruchzerlegung und über die Substitution $u = 4x + 3$.

Aufgabe 34.13. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{X^4 - 1}$.

Aufgabe 34.14. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{X(X-1)(X-2)(X-3)}$.

Aufgabe 34.15. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von $\frac{X^7 + X^4 - 5X + 3}{X^8 + X^6 - X^4 - X^2}$.

Aufgabe 34.16. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{1 + x^4}.$$

Aufgabe 34.17. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{3x - 5}{(x^2 + 2x + 7)^2}.$$

Aufgabe 34.18. (1 Punkt)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{7x^6 - 18x^5 + 8x^3 - 9x^2 + 2}{x^7 - 3x^6 + 2x^4 - 3x^3 + 2x - 5}.$$

35. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 35.1. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{e^{2t} + e^t + 1}{e^{2t} - 1}.$$

Aufgabe 35.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sinh t}.$$

Aufgabe 35.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\ln 2x}{x \ln 4x}.$$

Aufgabe 35.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sin^3 x}.$$

Aufgabe 35.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}.$$

Aufgabe 35.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\cos(2x) \sin^2(x).$$

Aufgabe 35.7. Zeige, dass die in Lemma 35.4 verwendeten Substitutionen $\sin t = \frac{2s}{1+s^2}$ und $\cos t = \frac{1-s^2}{1+s^2}$ die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllen.

Aufgabe 35.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sqrt{3x^2 + 4x - 2}.$$

Aufgabe 35.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}.$$

Aufgabe 35.10. Erstelle ein Abbildungsdiagramm, das aufzeigt, wie sich eine rationale Funktion in den trigonometrischen Funktionen als eine zusammengesetze Funktion ergibt.

Aufgabe 35.11. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von zwei rationalen Funktionen wieder rational ist.

Aufgabe 35.12. Berechne die Hintereinanderschaltungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der beiden rationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 3}{x - 2} \text{ und } g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 35.13. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{e^{2t} + e^{3t}}{e^{4t} - 1}.$$

Aufgabe 35.14. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\cosh x + \sinh^2 x}.$$

Aufgabe 35.15. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{9a^x + 4a^{-x}}$$

mit $a > 1$.

Aufgabe 35.16. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sin(3x)\cos(x)}.$$

Aufgabe 35.17. (6 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}.$$

Aufgabe 35.18. (6 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

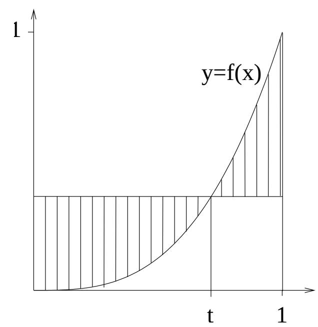
$$\frac{(\sqrt{x^2+x+1})^3+4x^3\sqrt{x^2+x+1}-3x\sqrt{x^2+x+1}}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Aufgabe 35.19. (5 Punkte)

Es sei

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) > 0$ für $x > 0$. Für welche Punkte $t \in [0,1]$ besitzt der Flächeninhalt der schraffierten Fläche ein lokales Extremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum oder um ein Maximum?



36. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 36.1. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_{-1}^{2} at^2 - a^2t\,dt$$

ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 36.2. Nach neuesten Studien zur Aufnahmefähigkeit von durchschnittlichen Studierenden wird die Aufmerksamkeitskurve am Tag durch

$$[8,18] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = -x^2 + 25x - 100,$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden und $y = f(x)$ ist die Aufnahmefähigkeit in Mikrocreditpoints pro Sekunde. Wann muss man eine ein einhalb stündige Vorlesung ansetzen, damit die Gesamtaufnahme optimal ist? Wieviele Mikrocreditpoints werden dann in dieser Vorlesung aufgenommen?

Aufgabe 36.3. Betrachte die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1],\, x \longmapsto x^n.$$

Berechne die Grenzfunktion, deren Integral (wenn es existiert), die Integrale $\int_0^1 f_n(t)\, dt$ und deren Grenzwert für $n \to \infty$.

Aufgabe 36.4. Sei I ein Intervall, r ein Randpunkt von I und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 36.5. Sei $I =]r,s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r,s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\, dt$$

existiert.

Aufgabe 36.6. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale.

Aufgabe 36.7. Diskutiere die Aufgaben 31.17 und 31.18 auf der Grundlage des Vergleichskriteriums.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.8. (4 Punkte)

Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

mit

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$$

auf punktweise Konvergenz und gleichmäßige Konvergenz und bestimme gegebenenfalls die Grenzfunktion.

Bestimme ferner

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 (x^2+1) f_n(x) dx \,.$$

Aufgabe 36.9. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine Folge von stetigen Funktionen

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, wo aber $\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 36.10. (8 Punkte)

Man betrachte die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} -x\ln(x) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Zeige, dass f stetig ist und dass $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{e}$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

b) Man zeige, dass die Funktionenfolge

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$$

auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert.

c) Beweise

$$\int_0^1 (-x)^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^{n+m} n!}{(m+1)^{n+1}}$$

für alle $m \geq n$.

d) Summiere die Reihe in b) und folgere

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} .$$

Aufgabe 36.11. (5 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 36.12. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(t)\, dt$ existiert.

Aufgabe zum Hochladen

Aufgabe 36.13. (4 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die die eulersche Konstante als einen Flächeninhalt erkennbar macht.

37. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 37.1. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8}\, dx$$

existiert.

Aufgabe 37.2. Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\, dt .$$

Aufgabe 37.3. Sei $x \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t) = t^x e^{-t}.$$

Bestimme die Extremwerte dieser Funktion.

Aufgabe 37.4. Begründe, warum die Fakultätsfunktion stetig ist.

Aufgabe 37.5. Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\operatorname{Fak}\,(\frac{2k-1}{2}) = \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

gilt.

Aufgabe 37.6. Wie sieht der Graph einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus, die nur von einer Variablen abhängt.

Aufgabe 37.7. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \text{ mit } y(\pi) = 7\,.$$

Aufgabe 37.8. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4\,.$$

Aufgabe 37.9. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y\,.$$

Aufgabe 37.10. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 37.11. (2 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 37.12. (4 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{x^3-3x+5}{x^4+2x^3+5x+8}\, dx$$

existiert.

Aufgabe 37.13. (5 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dt$$

existiert.

(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

Aufgabe 37.14. (2 Punkte)

Zeige, dass für die Fakultätsfunktion die Beziehung

$$\operatorname{Fak}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x\, dt$$

gilt.

Aufgabe 37.15. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y\,.$$

Aufgabe 37.16. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2+1} \text{ mit } y(1) = 2\,.$$

Kollektivaufgabe

Auf vielfältigen Wunsch hin darf in der Testklausur 1 eine in Wikiversity zu erstellende gemeinsame Formelsammlung verwendet werden. Dadurch soll das Gedächtnis für Wichtigeres geschont werden. Sie ist aber nicht dafür gedacht, grundlegende theoretische Zusammenhänge, die jeder Mathematiker wissen muss, extern abzuspeichern (also bspw. Substitutionsregel u. Ä.). Die Formelsammlung darf lediglich konkrete numerische Beziehungen enthalten, aber keine Definitionen oder Sätze. Einzelheiten sind verhandelbar, Akkreditierung durch den Dozenten.

38. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 38.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}.$$

Aufgabe 38.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}.$$

Aufgabe 38.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y.$$

Aufgabe 38.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7.$$

Aufgabe 38.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

Aufgabe 38.6. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0. Zeige unter Verwendung von Wiederholertutorium, Aufgabe 2.3, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 38.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 38.8. (2 Punkte)

Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 38.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

Aufgabe 38.9. (2 Punkte)

Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Aufgabe 38.10. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}\,.$$

Aufgabe 38.11. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2 + 2} y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 38.12. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 38.13. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}\,.$$

39. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 39.1. Skizziere die zugrunde liegenden Vektorfelder der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

sowie die in Beispiel 39.6, Beispiel 39.7 und Beispiel 39.8 angegebenen Lösungskurven.

Aufgabe 39.2. Bestätige die in Beispiel 39.6, Beispiel 39.7 und Beispiel 39.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

Aufgabe 39.3. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.4. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.5. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.6. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y}\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.7. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.8. Betrachte die in Beispiel 39.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (Für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*)

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 39.9. (3 Punkte)
Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Aufgabe 39.10. (3 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2,\, y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.11. (4 Punkte)
Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3y^3,\, y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 39.12. (5 Punkte)
Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I mit dem Grenzwert a und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in I mit dem Grenzwert b. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

40. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 40.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, t \longmapsto f(t) = (t^2 - \sin t \, , e^{-t} + 2t^3, t \cdot \sinh t + \frac{1}{t^2+1}),$$

in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 40.2. Skizziere die Bilder und die Graphen der folgenden Kurven im $\mathbb{R}^2$.

(1) $t \mapsto (t^2, t^2)$,
(2) $t \mapsto (t^2, -t^2)$,
(3) $t \mapsto (t^2, t)$,
(4) $t \mapsto (2t, 3t)$,
(5) $t \mapsto (t^2, t^3)$.

Aufgabe 40.3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und $v, w \in W$. Zeige, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow V, \, t \longmapsto tv + w,$$

differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(t) = v$.

Aufgabe 40.4. Es sei I ein reelles Intervall und V ein euklidischer Vektorraum. Es seien

$$f, g : I \longrightarrow V$$

zwei in $t_0 \in I$ differenzierbare Kurven und es sei

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in t_0 differenzierbare Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen gelten.

(1) Die Summe

$$f + g : I \longrightarrow V, \, t \longmapsto f(t) + g(t),$$

ist in t_0 differenzierbar mit

$$(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0) \, .$$

(2) Das Produkt

$$hf : I \longrightarrow V,\, t \longmapsto h(t)f(t),$$

ist differenzierbar in t_0 mit

$$(hf)'(t_0) = h(t_0)f'(t_0) + h'(t_0)f(t_0)\,.$$

Insbesondere ist für $c \in \mathbb{R}$ auch cf differenzierbar in t_0 mit

$$(cf)'(t_0) = cf'(t_0)\,.$$

(3) Wenn h nullstellenfrei ist, so ist auch die Quotientenfunktion

$$\frac{f}{h} : I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \frac{f(t)}{h(t)},$$

in t_0 differenzierbar mit

$$(\frac{f}{h})'(t_0) = \frac{h(t_0)f'(t_0) - h'(t_0)f(t_0)}{(h(t_0))^2}\,.$$

Die folgenden Aufgaben wiederholen wichige Eigenschaften von euklidischen Vektorräumen.

Aufgabe 40.5. Man beweise das *Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.* Das besagt, dass man in einem euklidischen Vektorraum aus einer gegebenen Basis $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis $u_1, \ldots, u_n$ basteln kann derart, dass die erzeugten Unterräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle$$

übereinstimmen für alle $i = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 40.6. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $|| - ||$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$|| v + w ||^2 + || v - w ||^2 = 2\, || v ||^2 + 2\, || w ||^2$$

gilt.

Aufgabe 40.7. Es seien $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$ zwei euklidische Vektorräume. Zeige, dass durch

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt auf dem Produktraum $V_1 \times V_2$ definiert wird.

Aufgabe 40.8. Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $a \in X$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f : T \longrightarrow V$$

eine Abbildung in einen euklidischen Vektorraum V mit den Komponentenfunktionen

$$f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

bzgl. einer Basis von V. Zeige, dass der Limes

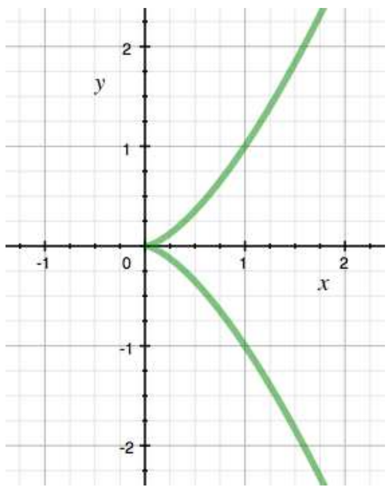
$$\lim_{x \to a} f(x)$$

genau dann existiert, wenn sämtliche Limiten

$$\lim_{x \to a} f_j(x)$$

existieren.

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 40.9. (3 Punkte)

Das Bild der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2, t^3),$$

definierten Kurve heißt *Neilsche Parabel*. Zeige, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau dann zu diesem Bild gehört, wenn er die Gleichung $x^3 = y^2$ erfüllt.

Aufgabe 40.10. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

die einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Schnittpunkt der durch die beiden Punkte $(t, 1)$ und $(0, -1)$ gegebenen Geraden G_t mit dem Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$$

zuordnet. Zeige, dass diese Abbildung wohldefiniert ist und bestimme die funktionalen Ausdrücke, die diese Abbildung beschreiben. Zeige, dass f differenzierbar ist. Ist f injektiv, ist f surjektiv?

Aufgabe 40.11. (3 Punkte)

Für welche Punkte $t \in \mathbb{R}$ ist der Abstand der Bildpunkte der Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (2 \sin t\,, 3 \cos t\,),$$

zum Nullpunkt $(0, 0)$ maximal, für welche minimal?

Aufgabe 40.12. (4 Punkte)

Betrachte die Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto (x^2 - x, x^3 + \sinh x\,, \sin (x^2)\,).$$

a) Bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt x.

b) Bestimme die Komponentenfunktionen von f bzgl. der neuen Basis

$$(1, 0, 3), (2, 4, 6), (1, -1, 0)$$

von $\mathbb{R}^3$.

c) Berechne die Ableitung in der neuen Basis direkt und mit Hilfe von Lemma 40.8.

Aufgabe 40.13. (4 Punkte)

Sei $P \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt und sei $I =]-1, 1[$. Wir betrachten die Menge

$$M = \{f : I \to \mathbb{R}^n |\, f \text{ differenzierbar, } f(0) = P\}\,.$$

Wir nennen zwei Kurven $f, g \in M$ *tangential äquivalent*, wenn $f'(0) = g'(0)$ ist.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde den einfachsten Vertreter für die Äquivalenzklassen.

c) Man gebe für jede Klasse einen weiteren Vertreter an.

d) Beschreibe die Menge der Äquivalenzklassen (also die Quotientenmenge).

41. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 41.1. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Länge der affin-linearen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto tv + w.$$

Aufgabe 41.2. Sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Kurve und $c \in [a, b]$. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn die beiden Einschränkungen von f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ rektifizierbar sind, und dass in diesem Fall

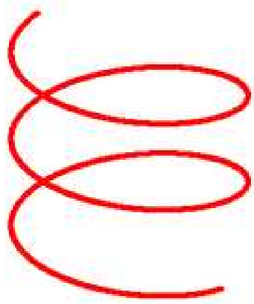
$$L_a^b(f) = L_a^c(f) + L_c^b(f)$$

gilt.

Aufgabe 41.3. Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - 5x^2 + 3x - 2,$$

von -5 nach 5.



Aufgabe 41.4. Bestimme die Länge der durch

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (\cos t\,, \sin t\,, t\,),$$

gegebenen *Schraubenlinie* für t zwischen 0 und b, wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 41.5. Wir betrachten die Kurve

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2-1, t^3-t).$$

a) Zeige, dass die Bildpunkte (x,y) der Kurve die Gleichung

$$y^2 = x^2 + x^3$$

erfüllen.

b) Zeige, dass jeder Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y^2 = x^2 + x^3$ zum Bild der Kurve gehört.

c) Zeige, dass es genau zwei Punkte t_1 und t_2 gibt mit identischem Bildpunkt, und dass ansonsten die Abbildung injektiv ist.

Aufgabe 41.6. Bestimme die Länge der Neilschen Parabel

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2, t^3),$$

von 0 bis b, wobei $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 41.7. Bestimme die Länge des Graphen des cosinus hyperbolicus $\cosh t$ von a nach b.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 41.8. (3 Punkte)

Es sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall und

$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann rektifizierbar ist, wenn sämtliche Komponentenfunktionen rektifizierbar sind.

Aufgabe 41.9. (3 Punkte)

Bestimme die Länge der differenzierbaren Kurve

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \left(\frac{t^3}{3}, \frac{4t^5}{5}, \frac{4t^7}{7}\right),$$

von a nach b.

Aufgabe 41.10. (4 Punkte)

Bestimme die Länge der Schleife der differenzierbaren Kurve (siehe Aufgabe 41.5)

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t^2-1, t^3-t).$$

Aufgabe 41.11. (5 Punkte)

Bestimme die Länge des Graphen der Exponentialfunktion $\exp t$ von a nach b.

42. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 42.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, y) \longmapsto xy,$$

(1) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
(2) im Punkt $(0, 0)$ in Richtung $(2, 5)$,
(3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(1, 0)$,
(4) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
(5) im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $(-1, 0)$,
(6) im Punkt $(3, 7)$ in Richtung $(5, -4)$.

Aufgabe 42.2. Sei

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{K}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)_P = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 42.3. Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und $v \in V$. Es sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass die Richtungsableitung $(D_v \varphi)_P$ im Punkt P genau dann existiert, wenn die Kurve

$$I \longrightarrow W,\ t \longmapsto \varphi(P + tv),$$

in $t = 0$ differenzierbar ist. Wie muss dabei das Intervall I gewählt werden?

Aufgabe 42.4. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 42.5. Es seien V und W reelle endlichdimensionale Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und $v \in V$ ein Vektor. Es bezeichne $C_v^1(G,W)$ die Menge aller in Richtung v differenzierbaren Abbildungen von G nach W. Zeige, dass die Abbildung

$$C_v^1(G,W) \longrightarrow \mathrm{Abb}(G,W),\ \varphi \longmapsto (D\varphi)_v,$$

linear ist.

Aufgabe 42.6. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

im Nullpunkt $(0,0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgabe 42.7. Zeige, dass eine polynomiale Funktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n),$$

stetig ist.

Aufgabe 42.8. Es sei

$$f : \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

eine Abbildung, die in jeder Komponente polynomial sei und sei

$$g : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine polynomiale Funktion. Zeige, dass dann auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ eine polynomiale Funktion ist.

Aufgabe 42.9. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathbb{K}^{n^2} \cong \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

eine polynomiale Funktion ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 42.10. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,0)$,

(4) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,-3)$,
(5) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,1)$,
(6) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(-1,\frac{1}{2})$,
(7) im Punkt $(5,7)$ in Richtung $(1,0)$,
(8) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(5,7)$.

Aufgabe 42.11. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\, (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1,\ldots,a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1,\ldots,v_n)\,.$$

Aufgabe 42.12. (3 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 42.11, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\, (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{K}^n$ die Richtungsableitung $D_v\varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

Aufgabe 42.13. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine differenzierbare Kurve und es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert. Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass

$$(f \circ \varphi)'(t) = (D_{\varphi'(t)} f)_{\varphi(t)}$$

gilt.

Aufgabe 42.14. (5 Punkte)

Seien D, E, F metrische Räume und sei

$$h : D \longrightarrow E$$

eine stetige Abbildung. Es sei $P \in D$ ein Berührpunkt von $D \setminus \{P\}$ und $h(P) = Q \in E$ ein Berührpunkt von $E \setminus \{Q\}$. Es sei

$$g : D \setminus \{Q\} \longrightarrow F$$

eine Abbildung und es sei vorausgesetzt, dass

$$\lim_{y \to Q} g(y)$$

existiert. Zeige, dass dann auch

$$\lim_{x \to P} g(h(x))$$

existiert und mit $\lim_{y \to Q} g(y)$ übereinstimmt.

43. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 43.1. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^3y - x^2, x^4y^2 - 3xy^3 + 5y).$$

Aufgabe 43.2. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2yz^3 - \sin x\,, \exp(x^4y) - 2x^2z^3 \cos(xy^2z)\,).$$

Aufgabe 43.3. Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\{(x,y) \in \mathbb{K}^2 |\,,\ y \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto \frac{x}{y}.$$

Aufgabe 43.4. Bestimme sämtliche höhere Richtungsableitungen der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto x^2y^3 - x^3y,$$

die sich mit den beiden Standardrichtungen $(1,0)$ und $(0,1)$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 43.5. Zeige, dass eine Polynomfunktion $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 43.6. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\ (x,y,z) \longmapsto (\sin xy\,, x^2y^3z^4 - y \sinh z\,, xy^2z + 5).$$

Aufgabe 43.7. (3 Punkte)

Bestimme die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,y) \longmapsto xy^3 - x^2y^2 - 4y^2.$$

Berechne die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (x, y) in Richtung $(2, 5)$. Bestätige, dass sich diese Richtungsableitung auch ergibt, wenn man die Jacobi-Matrix auf den Vektor $(2, 5)$ anwendet.

Aufgabe 43.8. (4 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Polynomfunktion. Zeige, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass sämtliche k-ten Richtungsableitungen null sind.

Aufgabe 43.9. (4 Punkte)

Es seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Zeige, dass dann für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) \;=\; D_{v_{\sigma(n)}}(...D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi))$$

gilt.

44. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 44.1. Sei $\varphi : V \to W$ konstant mit $\varphi(v) = w \in W$ für alle $v \in V$. Zeige, dass φ differenzierbar ist mit totalem Differential 0.

Aufgabe 44.2. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Es sei $\varphi : G \to W$ im Punkt $P \in G$ differenzierbar mit dem Differential $(D\varphi)_P$. Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{K}$ die Beziehung

$$(D(a\varphi))_P \;=\; a(D\varphi)_P$$

gilt.

Aufgabe 44.3. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 44.4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, W ein reeller Vektorraum und

$$\varphi : I \longrightarrow W$$

eine differenzierbare Kurve. Zeige, dass zwischen dem totalen Differential und der Kurven-Ableitung die Beziehung

$$(D\varphi)_P(1) \,=\, \varphi'(P)$$

besteht.

Aufgabe 44.5. Berechne für die Addition

$$+ : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und für die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

das totale Differential.

Aufgabe 44.6. Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x^2y^3.$$

Aufgabe 44.7. Seien V, W_1 und W_2 drei $\mathbb{K}$-Vektorräume.

(1) Seien $L_1 : V \to W_1$ und $L_2 : V \to W_2$ zwei $\mathbb{K}$-lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$L_1 \times L_2 : V \longrightarrow W_1 \times W_2,\, v \longmapsto (L_1(v), L_2(v)),$$

$\mathbb{K}$-linear ist.

(2) Seien $f_1 : V \to W_1$ und $f_2 : V \to W_2$ zwei im Punkt $P \in V$ differenzierbare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$f = (f_1 \times f_2) : V \longrightarrow W_1 \times W_2,\, Q \longmapsto (f_1(Q), f_2(Q)),$$

im Punkt P differenzierbar ist mit dem totalen Differential

$$(Df)_P = (Df_1)_P \times (Df_2)_P\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.8. (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimme das totale Differential für die Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K},\, (x, y) \longmapsto x^ay^b.$$

Aufgabe 44.9. (5 Punkte)

Zeige, dass eine Polynomfunktion

$$f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n),$$

in jedem Punkt total differenzierbar ist.

Aufgabe 44.10. (6 Punkte)

Es seien V und W zwei komplexe Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge und

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine in $P \in G$ (komplex-)differenzierbare Abbildung.

a) Zeige, dass φ auch reell-differenzierbar ist, wenn man V und W als reelle Vektorräume auffasst.

b) Beschreibe das reelle Differential der Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

in einem beliebigen Punkt $P \in \mathbb{C}$ bzgl. der reellen Basis $1, i \in \mathbb{C}$.

c) Man gebe ein Beispiel für eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},$$

die überall reell-differenzierbar ist, aber nirgendwo komplex-differenzierbar.

Aufgabe 44.11. (4 Punkte)

Seien $f_1, \ldots, f_n$ stetig differenzierbare Funktionen in einer Variablen. Bestimme das totale Differential der Abbildung

$$\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)).$$

Aufgabe 44.12. (5 Punkte)

Seien V und W zwei endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Betrachte die Evaluationsabbildung

$$\mathrm{Ev} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times V \longrightarrow W,\ (L, v) \longmapsto L(v).$$

Es sei daran erinnert, dass der Homomorphismenraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ebenfalls ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(1) Ist die Evaluationsabbildung linear?
(2) Bestimme die Richtungsableitung dieser Abbildung in einem Punkt (L, v) in Richtung (M, u) mittels der Definition von totaler Differenzierbarkeit.

Aufgabe 44.13. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f,g : G \to \mathbb{K}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 44.5 auf das Diagram

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{K}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.

45. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 45.1. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y) \longmapsto (xy - 2y^3 + 5, x^3 - xy^2 + y),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(4,-3)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.2. a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (xy - zy + 2z^2,\ \sin(x^2yz)),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(1,-1,\pi)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(2,0,5)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.3. Bestimme das totale Differential der Determinante

$$\det : \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ M \longmapsto \det M,$$

für $n = 2,3$ an der Einheitsmatrix.

Aufgabe 45.4. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 45.5. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$, $U \subseteq V$ offen und

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Es sei

$$\gamma : I \longrightarrow U$$

eine differenzierbare Kurve, die ganz in einer Niveaumenge von f verläuft. Zeige, dass

$$\langle \text{grad } f(P), \gamma'(t) \rangle \, = \, 0$$

ist für alle $t \in I$.

Aufgabe 45.6. Es seien L und M metrische Räume und es sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei

$$\varphi(P) \, = \, Q$$

und es sei

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt $Q \in M$ ein lokales Extremum besitze. Zeige, dass

$$f \circ \varphi$$

in P ein lokales Extremum besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 45.7. (4 Punkte)

a) Berechne das totale Differential der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3, \, (x,y) \longmapsto (x + y^2, xy, \exp x),$$

in jedem Punkt.

b) Was ist das totale Differential im Punkt $(3,2)$?

c) Berechne die Richtungsableitung in diesem Punkt in Richtung $(-1,-7)$.

d) Berechne den Wert von φ in diesem Punkt.

Aufgabe 45.8. (5 Punkte)

Untersuche die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ bei } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 \text{ bei } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

auf partielle Ableitungen und totale Differenzierbarkeit.

Aufgabe 45.9. (3 Punkte)

Zeige, dass keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^2$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 45.10. (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3,\, (u,v) \longmapsto (uv, u-v, v^2),$$

und

$$\psi : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^2,\, (x,y,z) \longmapsto (xyz^2, y\exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{K}^3$ das Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$.
(5) Berechne das Differential von $\psi \circ \varphi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{K}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 45.11. (5 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xf(y),$$

genau dann im Punkt $(0,0)$ total differenzierbar ist, wenn f in 0 stetig ist.

Aufgabe 45.12. (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Nullpunkt und $(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{m \to \infty} h_m = 0, \lim_{m \to \infty} \frac{h_m}{|| h_m ||} = v \in \mathbb{R}^n, f(h_m) = f(h_k) \text{ für alle } m, k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass v ein Eigenvektor von $(Df)_0$ zum Eigenwert 0 ist.

Aufgabe 45.13. (10 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

und eine stetige Funktion,

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die die Richtungsableitung in jede Richtung existiert, derart, dass die Verknüpfung

$$f \circ \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht differenzierbar ist.

46. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 46.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum V^* die gleiche Dimension wie V besitzt.

Aufgabe 46.2. Berechen den Gradienten der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y, z) \longmapsto x^2 y - z^3 x e^{xyz}$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 46.3. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 46.4. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 46.5. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten grad $f(P)$ ist.

Aufgabe 46.6. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 .$$

Aufgabe 46.7. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^2 - x .$$

Aufgabe 46.8. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x .$$

Aufgabe 46.9. Betrachte die Linearform

$$L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z .$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3 ,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) |\, 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E ,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 46.10. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 46.11. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 46.12. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bzgl. einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 46.13. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von f in jedem Punkt $P \in G$ symmetrisch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.14. (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq || v || \cdot || w ||$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

Aufgabe 46.15. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y\,.$$

Aufgabe 46.16. (4 Punkte)

Bestimme die globalen Extrema für die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + xy,$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Eckpunkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gegebene abgeschlossene Dreieck ist.

Aufgabe 46.17. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 46.18. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + \sin\, y\, - xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bzgl. des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.

(2) Es sei
$$E = \{(x, y, z) |\, 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$
und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten von g bzgl. der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.

Aufgabe 46.19. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V und einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, aber $\langle -, - \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 46.20. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bzgl. der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

47. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 47.1. Es sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
(2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bzgl. einer Basis ist invertierbar.
(3) Die Bilinearform ist vom Typ $(p, n-p)$ (mit einem $p \in \{1, \ldots, n\}$.)

Aufgabe 47.2. Es sei $\langle -,- \rangle$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ $(n-q, q)$ auf einem n-dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und es sei G die Gramsche Matrix zu $\langle -,- \rangle$ bzgl. dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von $\det G$ gleich $(-1)^q$ ist.

Aufgabe 47.3. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 47.4. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 47.5. Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^3 - xy + y^2,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.6. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - y \cdot \sin x\,,$$

im Nullpunkt $(0,0)$.

Aufgabe 47.7. Notiere das Taylor-Polynom für eine Funktion in 2 oder 3 Variablen für den Grad $k = 1, 2, 3$.

In den folgenden Aufgaben werden einige Eigenschaften der Polynomialkoeffizienten besprochen, die eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten sind.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ ein n-Tupel natürlicher Zahlen. Es sei $k = \sum_{j=1}^{n} r_j$. Dann nennt man die Zahl

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

einen *Polynomialkoeffizienten.*

Aufgabe 47.8. In einem Studium werden 11 Leistungsnachweise verlangt, und zwar 3 Seminarscheine, 5 Klausuren, 2 mündliche Prüfungen und eine Hausarbeit, die in beliebiger Reihenfolge erbracht werden können. Wieviele Reihenfolgen gibt es, um diese Leistungsnachweise zu erbringen?

Aufgabe 47.9. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j = k$. Zeige, dass die Anzahl der Abbildungen

$$\{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\},$$

bei denen das Urbild zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ aus genau r_i Elementen besteht, gleich

$$\binom{k}{r} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.10. Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $r = (r_1, \ldots, r_n)$ mit $\sum_{j=1}^{n} r_j = k$. Zeige, dass die Anzahl der k-Tupel

$$(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k ,$$

in denen die Zahl i genau r_i-mal vorkommt, gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.11. Zeige, dass die Anzahl der (geordneten) Partititonen zum Anzahltupel $r = (r_1, \ldots, r_n)$ einer k-elementigen Menge gleich

$$\frac{k!}{r!} = \frac{k!}{r_1! \cdots r_n!}$$

ist.

Aufgabe 47.12. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Beweise den *Polynomialsatz*, das ist die Gleichung

$$(a_1 + \ldots + a_n)^k = \sum_{r=(r_1,\ldots,r_n),\, \sum_{i=1}^n r_i = k} \binom{k}{r} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \cdots a_n^{r_n} .$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.13. (3 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

Aufgabe 47.14. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad ≤ 3 für die Funktion

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto z \cdot \exp(xy),$$

im Nullpunkt $(0, 0, 0)$.

Aufgabe 47.15. (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto xy^3 - x^2 \ln z,$$

im Punkt $(0, 2, 3)$.

Aufgabe 47.16. (5 Punkte)

Bestimme den Typ der Hesse-Form zur Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - xy^2 + x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt.

Aufgabe 47.17. (5 Punkte)

Es sei f ein Polynom in n Variablen vom Grad $\leq k$. Zeige, dass f mit dem Taylorpolynom vom Grad $\leq k$ von f im Nullpunkt übereinstimmt.

48. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 48.1. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeige durch ein Beispiel, dass das Taylor-Polynom zum Produkt fg im Punkt P vom Grad ≤ 2 nicht das Produkt der beiden Taylor-Polynome von f und g in P vom Grad ≤ 1 sein muss.

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 48.2. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.3. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.4. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.5. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.6. Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.7. Es sei
$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, wobei $G \subseteq V$ eine offene Menge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sei. Zeige, dass für $P \in G$ und $v \in V$ die Beziehung
$$\sum_{|r|=2} \frac{1}{r!} D^r f(P) \cdot v^r \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{Hess}_P f(v,v)$$
gilt.

Aufgabe 48.8. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen
$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$
an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 48.9. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim(V) \geq 2$, $G \subseteq V$ offen, und $P \in G$. Man gebe ein Beispiel von zwei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen
$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$
an derart, dass ihre quadratischen Approximationen in P übereinstimmen, und die eine Funktion ein Extremum in P besitzt, die andere nicht.

Aufgabe 48.10. Skizziere die Nullstellenmenge (die Niveaumenge zum Wert 0) einer Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit $f(0,0) = 0$ und der Eigenschaft, dass f in $(0,0)$ kein lokales Minimum besitzt, dass aber die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 48.11. Sei
$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Polynomfunktion und $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V mit den zugehörigen Koordinatenfunktionen z_i, $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f auch eine Polynomfunktion in diesen Koordinaten ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 48.12. (5 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und

$$f : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es maximal ein Polynom $p(x_1, \ldots, x_n)$ vom Grad $\leq k$ mit der Eigenschaft geben kann, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{|| f(x) - p(x) ||}{|| x ||^k} = 0$$

gilt.

Aufgabe 48.13. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ und seien

$$f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei k-mal stetig differenzierbare Funktionen mit den Taylor-Polynomen $T_k(f)$ und $T_k(g)$ in P vom Grad $\leq k$. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls k-mal stetig differenzierbar ist, und dass für das Taylor-Polynom $T_k(fg)$ von fg in P vom Grad $\leq k$ die Beziehung

$$T_k(fg) = (T_k(f) \cdot T_k(g))_{\leq k}$$

besteht, wobei der Subskript $\leq k$ bedeutet, dass das Polynom bis zum Grad k genommen wird.

Aufgabe 48.14. (4 Punkte)

Sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Untersuche die Funktion

$$f : I \times I \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \frac{\cos\, x}{\cos\, y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.15. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 48.16. (5 Punkte)
Sei

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0, 0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 48.17. (6 Punkte)
Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ für } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 \text{ für } (x, y) = (0, 0)\,, \end{cases}$$

zweimal partiell differenzierbar ist, und dass

$$D_1D_2f(0, 0) \neq D_2D_1f(0, 0)$$

gilt.

49. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 49.1. Zeige, dass der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ vollständig ist.

Aufgabe 49.2. Es sei

$$f : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M, die Lipschitz-stetig sei. Zeige, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 49.3. Zeige, dass die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante 1.

Aufgabe 49.4. Es sei M eine Menge und es sei

$$F : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen $\triangle = \{(x,x) \in M \times M |\, x \in M\}$ nicht leer ist.

Aufgabe 49.5. Es sei

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, 0 < || \, (x,y) \, || \leq 1\} \, .$$

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f : D \longrightarrow D,$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 49.6. Sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion, die zugleich eine starke Kontraktion sei. Zeige, dass dann die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) - x,$$

streng fallend ist.

Aufgabe 49.7. Man gebe ein Beispiel einer bijektiven differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

mit einer stetigen Umkehrabbildung ψ derart, dass ψ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 49.8. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

eine Funktion. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (x, y + f(x)),$$

bijektiv ist. Bestimme explizit eine Umkehrabbildung.

Was besagt in der vorstehenden Aufgabe der Satz über die Umkehrabbildung, wenn f differenzierbar ist?

Aufgabe 49.9. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n)),$$

Zeige:

(1) Die Abbildung f ist differenzierbar.
(2) Das totale Differential von f in 0 ist genau dann bijektiv, wenn von sämtlichen Funktionen f_i, $i = 1, \ldots, n$, die Ableitungen in 0 nicht 0 sind.
(3) f ist genau dann auf einer offenen Umgebung von 0 bijektiv, wenn die einzelnen f_i in einer geeigneten Umgebung bijektiv sind.

In den folgenden Aufgaben seien die Homomorphismenräume $\operatorname{Hom}(V, W)$ mit der Norm

$$|| \varphi ||:= \sup (|| \varphi(v) ||, || v ||= 1)$$

versehen (vergleiche auch Arbeitsblatt 22).

Aufgabe 49.10. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $G = \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow G,\ M \longmapsto M^{-1},$$

stetig ist.

Aufgabe 49.11. Seien V und W euklidische Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow W$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig differenzierbar ist, wenn φ total differenzierbar ist und wenn die Abbildung

$$G \longrightarrow \operatorname{Hom}(V, W),\ P \longmapsto (D\varphi)_P,$$

stetig ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 49.12. (2 Punkte)

Sei M ein vollständiger metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass T genau dann vollständig ist, wenn T abgeschlossen ist.

Aufgabe 49.13. (2 Punkte)

Seien U_1 und U_2 offene Mengen in euklidischen Vektorräumen V_1 und V_2. Es sei

$$\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$$

eine bijektive Abbildung, die in einem Punkt $P \in U_1$ differenzierbar sei derart, dass die Umkehrabbildung in $Q = \varphi(P)$ auch differenzierbar ist. Zeige, dass das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist.

Aufgabe 49.14. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine starke Kontraktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

die keinen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 49.15. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>1} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x,$$

folgende Eigenschaften besitzt: Es ist

$$| f(x) - f(y) | < | x - y | ,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>1}$, $x \neq y$, aber f ist nicht stark kontrahierend.

Aufgabe 49.16. (2 Punkte)

Zeige, dass eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei euklidischen Vektorräumen V und W genau dann stark kontrahierend ist, wenn $|| \varphi || < 1$ ist.

Aufgabe 49.17. (4 Punkte)

Bestimme die Umkehrabbildung zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y).$$

(Tipp: Versuche, diese Funktion als Hintereinanderschaltung von einfacheren Abbildungen zu schreiben.)

50. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 50.1. Bestimme für die Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 50.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,\ (x, y) \longmapsto (x, e^{x+y}),$$

bijektiv ist. Man gebe explizit eine Umkehrabbildung an.

Aufgabe 50.3. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 50.4. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x^2 y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1, 0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 50.5. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 50.6. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x + iy = (x, y) \longmapsto (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = (x^2 - y^2, 2xy).$$

Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar? Wieviele Urbilder besitzt ein Punkt?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.7. (4 Punkte)

Man konstruiere ein Beispiel, das zeigt, dass Lemma 49.3 ohne die Voraussetzung, dass mit je zwei Punkten auch die Verbindungsgerade zur Definitionsmenge gehört, nicht gilt.

(Tipp: Man denke daran, wie man flach auf einen steilen Berg kommt.)

Aufgabe 50.8. (3 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann eine Verschiebung ist, also von der Art $P \mapsto P + v$ mit einem festen Vektor $v \in V$, wenn

$$(D\varphi)_P = \mathrm{Id}_V$$

ist für alle $P \in V$.

Aufgabe 50.9. (3 Punkte)

Seien V_1 und V_2 endlichdimensionale reelle Vektorräume, $G \subseteq V_1$ offen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow V_2$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $U \subseteq G$ eine offene Teilmenge derart, dass für jeden Punkt $P \in U$ das totale Differential $(D\varphi)_P$ bijektiv ist. Zeige, dass dann das Bild $\varphi(U)$ offen in V_2 ist.

Aufgabe 50.10. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

(1) Bestimme die regulären Punkte von φ.
(2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung φ nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von φ in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
(3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar (s, p) schreiben als $(s, p) = (x + y, xy)$?
(4) Ist ein reelles Zahlenpaar (x, y) bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe $x + y$ und das Produkt xy festgelegt?

Aufgabe 50.11. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \longmapsto (x + y + z, xy + xz + yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x, y, z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x, y, z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 50.12. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2 - y^2 z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

51. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 51.1. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

Aufgabe 51.2. Betrachte die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^3 - x^2 - 2x + 2.$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}$ ist φ regulär? Was besagt der Satz über implizite Abbildungen in dieser Situation? Wie sieht lokal die Faser in einem regulären Punkt aus? Kann es leere Fasern geben? Bestimme die Faser über 0.

Aufgabe 51.3. Seien $L_1, \ldots, L_n$ und $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und seien

$$\varphi_i : L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i. Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \ldots, P_n)$ gleich $F_1 \times \cdots \times F_n$ ist.

Aufgabe 51.4. Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetig differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen f' und g' stets positiv seien. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto f(x) + g(y),$$

stetig differenzierbar und in jedem Punkt regulär ist. Man gebe explizit eine Beschreibung der Fasern von φ als Graph an.

Aufgabe 51.5. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen $\mathbb{R}$ und den Fasern von φ an.

Aufgabe 51.6. Beschreibe die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Man gebe, falls dies möglich ist, Diffeomorphismen zwischen offenen Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}$ und (möglichst großen) offenen Teilmengen der Fasern von φ an.

Aufgabe 51.7. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy.$$

Aufgabe 51.8. Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 51.9. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \varphi(x, y),$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, für die in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \varphi(P) = 0$$

gelte. Zeige, dass es dann Funktionen

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass

$$\varphi(x,y) = f(x) + g(y)$$

gilt.

Aufgabe 51.10. (5 Punkte)

Zeige, dass die Fasern der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 - y^3,$$

in jedem Punkt $P = (x,y)$ lokal homöomorph zu einem offenen reellen Intervall sind. D.h. dass es zu jedem Punkt $P = (x,y)$ eine offene Umgebung $(x,y) \in U$, ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und eine stetige Bijektion

$$I \longrightarrow U \cap F_P,$$

gibt (wobei F_P die Faser von φ durch P bezeichnet), deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 51.11. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei $P \in \mathbb{R}^2$ ein isolierter Punkt, d.h. es gebe eine offene Umgebung $P \in U$ derart, dass $\varphi(Q) \neq \varphi(P)$ ist für alle $Q \in U$, $Q \neq P$. Zeige, dass dann φ in P ein isoliertes lokales Extremum besitzt.

Aufgabe 51.12. (3 Punkte)

Beschreibe den Tangentialraum an die Faser in jedem regulären Punkt der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Aufgabe 51.13. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2,$$

im Punkt $P = (1,-1,2)$. Man gebe eine differenzierbare Abbildung

$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

an, wobei U eine möglichst große offene Teilmenge des Tangentialraumes T_PF an die Faser F_P von φ durch P ist, die eine Bijektion zwischen U und $V \cap F_P$ stiftet ($P \in V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen).

Aufgaben zum Hochladen

Aufgabe 51.14. (3 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto x^2+y^2+z^2.$$

Man fertige eine Skizze an, die die Fasern, die Tangentialräume und lokale Diffeomorphismen zwischen Tangentialraum und Faser sichtbar macht.

Aufgabe 51.15. (4 Punkte)

Sei

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^y.$$

Man fertige Skizzen für den (1) Graph und (2) die Fasern und die Tangentialräume dieser Abbildung an.

Aufgabe 51.16. (8 Punkte)

Man fertige eine Animation an, die den Banachschen Fixpunktsatz anhand eines „Karte in der Karte“-Modells illustriert.

52. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 52.1. Finde für die folgenden Kurven

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von γ genau die Faser von φ über 0 ist.

(1) $\gamma(t) = (t, t^3)$.
(2) $\gamma(t) = (t^3, t^3+1)$.
(3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$.

Aufgabe 52.2. Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ die Faser über $P \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass es auch eine stetige Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt derart, dass F die Faser von ψ über einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 52.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

in einen weiteren reellen endlichdimensionalen Vektorraum W gibt derart, dass U die Faser über $0 \in W$ ist und dass φ in jedem Punkt $v \in V$ regulär ist.

Aufgabe 52.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung, die im Punkt $P \in G$ ein surjektives totales Differential besitze. Es sei

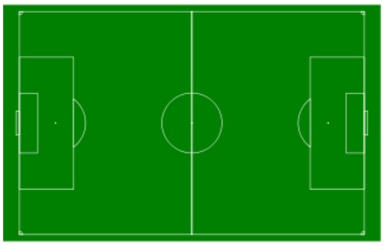
$$\psi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(mit $U \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ offen) ein lokaler Diffeomorphismus auf die Faser durch P, bei dem $Q \in U$ auf P abgebildet wird. Zeige, dass man den Tangentialraum an die Faser durch P auch als

$$\{P + (D\psi)_Q(u) \mid u \in \mathbb{R}^{n-m}\}$$

beschreiben kann.

Aufgabe 52.5. Ein Fußballfeld soll in einen Park mit Erhebungen und mit Senken umgewandelt werden. Dabei sollen die Linien unverändert bleiben und alle anderen Punkte sollen ihre Höhe ändern. Ist dabei jede Vorgabe, welche umrandeten Gebiete erhöht oder gesenkt werden sollen, möglich? Ist jedes solche Vorhaben durch eine stetige oder eine differenzierbare Höhenfunktion durchführbar? Können im differenzierbaren Fall alle Punkte regulär sein?



Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.6. (4 Punkte)

Bestimme den Tangentialraum an die Faser im Punkt $(2, -1, 3)$ der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2 e^z - y^3, \frac{x}{e^{yz}}),$$

und zwar sowohl durch lineare Gleichungen als auch durch eine parametrisierte Gerade.

Aufgabe 52.7. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 52.8. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xy, yz).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung.

Aufgabe 52.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 \cdot \sin y - y \cdot \cos(xy).$$

Zeige, dass die Faser durch den Punkt $P = (2, 3)$ sich lokal durch eine differenzierbare Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = P$ parametrisieren lässt, und bestimme die möglichen Werte der Ableitung $\gamma'(0)$.

Aufgabe 52.10. (4 Punkte)

Es seien

$$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Abbildungen und seien F_1 und F_2 Fasern dieser Abbildungen, d.h. es sei $F_1 = \varphi_1^{-1}(b_1)$ und $F_2 = \varphi_2^{-1}(b_2)$ (für gewisse $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$). Zeige, dass es eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $F_1 \cup F_2 = \varphi^{-1}(a)$ ist.

Aufgabe 52.11. (4 Punkte)

Man gebe explizit eine stetige Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass die Faser von φ über 0 gleich $I = \{(x,0) | \, x \in [0,1]\}$ ist.

53. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 53.1. Sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $M = \operatorname{Abb}(T, E)$ versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert ∞ erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

(1) $|| \, f \, || \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $|| \, f \, || = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt
$$|| \, \lambda f \, || = | \, \lambda \, | \cdot || \, f \, || \, .$$
(4) Für $g, f \in M$ gilt
$$|| \, g + f \, || \leq || \, g \, || + || \, f \, || \, .$$

Aufgabe 53.2. Es sei

$$C = C^0([0,1], \mathbb{R})$$

die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu $\epsilon > 0$ die offene und die abgeschlossene ϵ-Umgebung von einem $f \in C$.

Aufgabe 53.3. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven

$$g : I \longrightarrow V,$$

wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

Aufgabe 53.4. Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f : I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v) = g(t)?$$

Aufgabe 53.5. Sei

$$f : I \times U \longrightarrow V$$

ein Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t, P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 22.21 an.

Aufgabe 53.6. Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

In der speziellen Relativitätstheorie ist auf dem $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die *Lorentz-Form*

$$\langle v, w \rangle = \langle (t, x_1, \ldots, x_n), (s, y_1, \ldots, y_n) \rangle := -c^2 ts + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

wichtig, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese Form ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform vom Typ $(n, 1)$. Sie erlaubt es, die „Welt“ in lichtartige, zeitartige und raumartige Vektoren aufzuteilen, und den Zusammenhang dieser fundamentalen Größen zu verstehen. Die zugehörige quadratische Form ist die Abbildung

$$\varphi : V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto -c^2 t^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt *zeitartig*, wenn $\varphi(v) < 0$ ist, *lichtartig*, wenn $\varphi(v) = 0$ ist und *raumartig*, wenn $\varphi(v) > 0$ ist. Mathematisch setzt man im Allgemeinen $c = 1$.

Aufgabe 53.7. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,x) \longmapsto -t^2 + x^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 53.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t,x) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 53.9. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t,u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u,v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 53.10. (3 Punkte)

Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit $u(0) = a$ und $v(0) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 53.11. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $C = C^0(T, E)$ der Raum der stetigen Abbildungen von T nach E, versehen mit der Supremumsnorm. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in T$ und $y_1, \ldots, y_n \in E$ Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C \mid f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in C ist.

Aufgabe 53.12. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und sei M ein vollständiger metrischer Raum. Sei C die Menge der stetigen Abbildungen von T nach M. Definiere eine Metrik auf C derart, dass C selbst zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Aufgabe 53.13. (4 Punkte)

Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V unabhängig von der gewählten Basis ist.

Aufgabe 53.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t\,).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bzgl. der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

Aufgabe 53.15. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (t, x, y, z) \longmapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) \\ +(t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2)\,.$$

54. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 54.1. Es seien L und M metrische Räume und es seien

$$f, g : L \longrightarrow M$$

zwei stetige Abbildungen. Zeige, dass die Menge

$$N = \{x \in L | \, f(x) = g(x)\}$$

abgeschlossen in L ist.

Aufgabe 54.2. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für Vektorfelder?

Aufgabe 54.3. Sei

$$I \times U \longrightarrow V, \, (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein Vektorfeld. Zeige, dass eine konstante Abbildung

$$\varphi : I \longrightarrow U, \, t \longmapsto \varphi(t) = c,$$

genau dann eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(t, v)$ ist, wenn $f(t, c) = 0$ ist für alle $t \in I$.

Aufgabe 54.4. Es sei

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

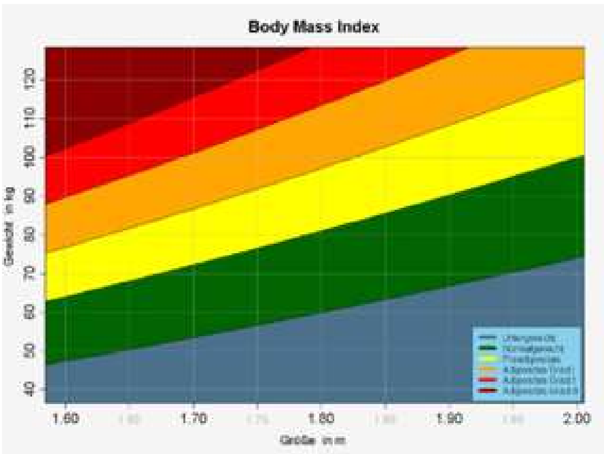
Aufgabe 54.5. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \, (m, l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

(1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
(2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.

(3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
(4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
(5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.
(6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
(7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.



Aufgabe 54.6. Es sei $U \subseteq V$ eine offene Teilmenge in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V. Es sei

$$I \times U \longrightarrow V,\ (t, v) \longmapsto f(t, v),$$

ein *Zentralfeld*, d.h. ein Vektorfeld f vom Typ

$$f(t, v) = g(t, v) \cdot v$$

mit einer stetigen Funktion

$$g : I \times U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, v) \longmapsto g(t, v).$$

Zeige, dass zu einem fixierten $w \in U$ die Lösungen

$$\alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

der eindimensionalen Differentialgleichung

$$y' = h(t, y) := g(t, yw)y \text{ mit } \alpha(t_0) = 1$$

zu Lösungen der Differentialgleichung

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w$$

führen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 54.7. (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Aufgabe 54.8. (4 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$f : U \longrightarrow V$$

ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Es sei

$$v : J \longrightarrow U$$

eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(v)$. Es gebe zwei Zeitpunkte $t_0 \neq t_1$ in J mit $v(t_0) = v(t_1)$. Zeige, dass es dann eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung dieser Differentialgleichung gibt.

Aufgabe 54.9. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

Aufgabe 54.10. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblem für das Zentralfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, v, w) \longmapsto (t^3 - t)(v, w) = ((t^3 - t)v, (t^3 - t)w),$$

mit $\varphi(0) = (2, 3)$.

Aufgabe 54.11. (4 Punkte)

Finde die Lösung φ des Anfangswertproblem für das Zentralfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, v, w) \longmapsto (t^2 v)(v, w) = (t^2 v^2, t^2 vw),$$

mit $\varphi(0) = (5, -1)$.

Aufgabe 54.12. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung drittter Ordnung

$$y''' = 9y - 3ty' + y'' .$$

mit einem polynomialen Ansatz für $y(t)$.

55. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 55.1. Welche linearen Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

Aufgabe 55.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist φ-invariant.
(2) V ist φ-invariant.
(3) Eigenräume sind φ-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ φ-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ φ-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein φ-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ φ-invariant.

Aufgabe 55.3. Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum über einem Körper K. Es sei

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in V. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

gibt derart, dass diese Fahne eine φ-invariante Fahne wird.

Aufgabe 55.4. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste φ-invariante Unterraum von V, der v enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 55.5. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass die durch

$$U = \{v \in V |\ \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \varphi^n(v) = 0\}$$

definierte Teilmenge von V ein φ-invarianter Unterraum ist.

Aufgabe 55.6. Definiere: eine *lineare Differentialgleichung höherer Ordnung* (*homogen/inhomogen*; mit *konstanten Koeffizienten*). Zeige, dass eine solche lineare Differentialgleichung höherer Ordnung zu einem entsprechenden linearen Differentialgleichungssystem wie in Lemma 54.8 äquivalent ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 55.7. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 55.8. (4 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine eigentliche Isometrie. Es sei vorausgesetzt, dass f trigonalisierbar ist. Zeige, dass dann f sogar diagonalisierbar ist.

Aufgabe 55.9. (4 Punkte)

Es sei M eine reelle 2×2-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass M über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 55.10. (4 Punkte)

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bzgl. der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bzgl. der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 55.11. (4 Punkte)

Löse die Differentialgleichung

$$y'' = -ay$$

(mit $a > 0$) und der Anfangsbedingung $y(0) = x$ und $y'(0) = v$.

Die für $t \in \mathbb{R}$, $-1 < t < 1$, und ein $n \in \mathbb{N}$ definierte lineare Differentialgleichung

$$y'' - \frac{2t}{1-t^2}y' + \frac{n(n+1)}{1-t^2}y = 0$$

heißt *Legendresche Differentialgleichung* zum Parameter n.

Aufgabe 55.12. (4 Punkte)

Zeige, dass das n-te *Legendre-Polynom*

$$\frac{1}{2^n(n!)}((t^2-1)^n)^{(n)}$$

eine Lösung der Legendreschen Differentialgleichung zum Parameter n ist.

56. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 56.1. Sei M eine quadratische $n \times n$-Matrix über $\mathbb{K}$. Es sei φ_1 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t)$$

und φ_2 eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_2(t)\,.$$

Zeige, dass $\varphi_1 + \varphi_2$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$v' = Mv + z_1(t) + z_2(t)$$

ist.

Aufgabe 56.2. Sei

$$v' = Mv$$

ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten, sei L der Lösungsraum dieses Systems und sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \mathbb{K}^n,\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0),$$

ein Vektorraum-Isomorphismus ist.

Aufgabe 56.3. Wie transformieren sich in Lemma 56.2 die Anfangsbedingungen?

Aufgabe 56.4. Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 56.5. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 56.6. (6 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 56.7. (4 Punkte)

Löse das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 56.8. (5 Punkte)

Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 56.9. (6 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimme den Lösungsraum zum linearen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 56.10. (5 Punkte)

Bestimme die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 + e^t \\ t \end{pmatrix} .$$

Fachbereich Mathematik/Informatik **12. Mai 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Erste Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
mögl. Pkt.:	3	2	5	6	3	10	8	10	7	6	4	64
erhalt. Pkt.:												

Note:

Aufgabe 1.1. (3 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$.
(2) Eine *Stammfunktion* zu einer Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.
(3) Der Limes einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $x \to \infty$.
(4) Die *Fakultätsfunktion* (einschließlich Definitionsbereich).
(5) Eine *Lösung* zu einem Anfangswertproblem.
(6) Eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen*.

Lösung

(1) Eine Funktion

$$t : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von $[a, b]$ gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(2) Eine Funktion $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf $]a, b[$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in]a, b[$.

(3) Eine reelle Zahl w heißt *Limes* von f für $x \to \infty$, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \geq s$, ist $| f(x) - w | \leq \epsilon$.

(4) Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, heißt die Funktion

$$x \longmapsto \operatorname{Fak}(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} \, dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

(5) Eine differenzierbare Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0 \,,$$

wenn die Eigenschaften

(a) Die Punkte $(t, y(t))$ liegen in der Definitionsmenge von f für alle $t \in I$.
(b) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.
(c) $y(t_0) = y_0$,

gelten.

(6) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Aufgabe 1.2. (2 (1+1) Punkte)

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt.

Lösung

a) Die Länge des Intervalls ist 9, daher muss die Länge der Teilintervalle gleich $\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$ sein. Dies ergibt die Teilintervalle

$$[-4, -\frac{5}{2}],\ [-\frac{5}{2}, -1],\ [-1, \frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2}, 2],\ [2, \frac{7}{2}],\ [\frac{7}{2}, 5]\,.$$

b) Die Treppenfunktion, die abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt, hat das Treppenintegral

$$1,5 \cdot (2 - 1 + 2 - 1 + 2 - 1) \;=\; 1,5 \cdot 3 \;=\; 4,5.$$

Aufgabe 1.3. (5 Punkte)

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 4 &= (\sqrt{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{25}{12} - 4 \\ &= (\sqrt{3}x + \frac{5}{2\sqrt{3}})^2 - \frac{73}{12} \end{aligned}$$

$$= \frac{73}{12}\left((\frac{\sqrt{12}\sqrt{3}}{\sqrt{73}}x + \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}\sqrt{73}})^2 - 1 \right)$$
$$= \frac{73}{12}\left((\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})^2 - 1 \right).$$

Daher ist mit der Substitution

$$u = \frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}$$

bzw.

$$x = \frac{\sqrt{73}}{6}u - \frac{5}{6}$$

$$\int \sqrt{3x^2 + 5x - 4}\, dx = \int \sqrt{\frac{73}{12}(u^2 - 1)} \cdot \frac{\sqrt{73}}{6}\, du = \frac{73}{12\sqrt{3}} \int \sqrt{u^2 - 1}\, du.$$

Eine Stammfunktion hiervon ist

$$\frac{73}{12\sqrt{3}}\frac{1}{2}(u\sqrt{u^2 - 1} - \operatorname{arcosh} u)$$

und damit ist

$$\frac{73}{24\sqrt{3}}\left((\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})\sqrt{(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}})^2 - 1} - \operatorname{arcosh}(\frac{6}{\sqrt{73}}x + \frac{5}{\sqrt{73}}) \right)$$

eine Stammfunktion von

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Aufgabe 1.4. (6 (2+4) Punkte)

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_+$ und es sei

$$f(x) = R(x, \sqrt[k]{x})$$

eine rationale Funktion in x und in $\sqrt[k]{x}$. Man gebe direkt (ohne Bezug auf Standardsubstitutionen der Vorlesung) eine geeignete Substitution an, mit der die Berechnung der Stammfunktion zu $f(x)$ auf die Berechnung einer Stammfunktion einer rationalen Funktion in einer Variablen zurückgeführt werden kann.

b) Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion (mit $x > 1$)

$$\frac{\sqrt[3]{x} + x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}}\,.$$

Lösung

a) Wir betrachten die Substitution $x = u^k$ bzw. $u = \sqrt[k]{x}$. Damit ist

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int R(x, \sqrt[k]{x})\,dx \;=\; \int R(u^k, u) \cdot k u^{k-1}\,du.$$

Dabei ist jetzt $R(u^k, u)$ eine rationale Funktion in u, und bei der Multiplikation mit ku^{k-1} bleibt dies eine rationale Funktion.

b) Mit der Substitution $x = u^3$ bzw. $u = \sqrt[3]{x}$ ist

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \int \frac{u + u^3}{u^2 - u} \cdot 3u^2\,du \;=\; \int \frac{u + u^3}{u^2 - u} \cdot 3u^2\,du \;=\; \int \frac{3u^2 + 3u^4}{u - 1}\,du.$$

Polynomdivision ergibt

$$u^4 + u^2 = (u-1)(u^3 + u^2 + 2u + 2) + 2$$

und daher ist dieses Integral gleich

$$\int \frac{3u^2 + 3u^4}{u - 1}\,du \;=\; \int 3u^3 + 3u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u-1}\,du.$$

Eine Stammfunktion ist daher

$$\frac{3}{4}u^4 + u^3 + 3u^2 + 6u + 6 \cdot \ln(u-1)\,.$$

Somit ist

$$\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + 3(\sqrt[3]{x})^2 + 6\sqrt[3]{x} + 6 \cdot \ln(\sqrt[3]{x} - 1)$$

eine Stammfunktion von $\frac{\sqrt[3]{x}+x}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}}$.

Aufgabe 1.5. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$

$$\frac{1}{\cos t}\,.$$

Lösung

Die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\cos t}$$

berechnet sich unter Verwendung von Lemma 35.4 folgendermaßen.

$$\int \frac{1}{\cos t}\,dt \;=\; \int \frac{1+s^2}{1-s^2} \cdot \frac{2}{1+s^2}\,ds \;=\; \int \frac{2}{1-s^2}\,ds\,.$$

Eine Stammfunktion von $2\frac{1}{1-s^2}$ ist $\ln\frac{1-s}{1+s}$. Daher ist

$$\ln\left(\frac{1-\tan\frac{t}{2}}{1+\tan\frac{t}{2}}\right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\cos t}$.

Aufgabe 1.6. (10 Punkte)

Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)\right)$$

für $h \to 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $g(t) = f(t) - f(x)$ betrachten können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|f(t)| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ die Abschätzung

$$\left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\right| \leq \left|\int_x^{x+h} \epsilon\,dt\right| = |h|\,\epsilon$$

und daher

$$|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq \epsilon.$$

Aufgabe 1.7. (8 (4+1+3) Punkte)

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1}.$$

b) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1}.$$

c) Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sinh^2 t}.$$

Lösung

Es ist

$$\frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} = \frac{4s}{(s^2-1)^2} = \frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2}.$$

Damit liegt die Faktorzerlegung des Nenners vor, so dass die Partialbruchzerlegung die Gestalt

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s-1)^2} + \frac{c}{(s+1)} + \frac{d}{(s+1)^2}$$

mit reellen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ besitzt. Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$4s = a(s-1)(s+1)^2 + b(s+1)^2 + c(s+1)(s-1)^2 + d(s-1)^2.$$

Einsetzen von $s = 1$ ergibt $4 = 4b$, also $b = 1$.

Einsetzen von $s = -1$ ergibt $-4 = 4d$, also $d = -1$.

Einsetzen von $s = 0$ ergibt $0 = -a + b + c + d$, also ist $-a + c = 0$, also $a = c$.

Einsetzen von $s = 2$ ergibt

$$8 = 9a + 9b + 3c + d = 9a + 9 + 3c - 1.$$

Also ist $9a + 3c = 0$ und daher $a = c = 0$. Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}.$$

b) Eine Stammfunktion von

$$\frac{4s}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

ist

$$-(s-1)^{-1} + (s+1)^{-1}\,.$$

c) Es ist

$$\frac{1}{\sinh^2 t} = \frac{4}{(e^t - e^{-t})^2} = \frac{4}{(e^t)^2 - 2 + (e^t)^{-2}}.$$

Wir wenden die Standardsubstitution $t = \ln s$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sinh^2 t} dt &= \int \frac{4}{(e^t)^2 - 2 + (e^t)^{-2}} dt \\ &= \int \frac{4}{s^2 - 2 + s^{-2}} \cdot \frac{1}{s} ds \\ &= \int \frac{4s}{s^4 - 2s^2 + 1} ds. \end{aligned}$$

Nach Teil b) ist

$$-(e^t - 1)^{-1} + (e^t + 1)^{-1}$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sinh^2 t}$.

Aufgabe 1.8. (10 (4+6) Punkte)

a) Sei

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine monoton fallende stetige Funktion. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(t)\, dt$$

existiert. Zeige, dass

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

ist.

b) Man zeige durch ein Beispiel, dass die Aussage in a) für eine stetige, nicht monoton fallende Funktion nicht gelten muss.

Lösung

a) Da das uneigentliche Integral existiert sind insbesondere die eigentlichen Integrale $\int_0^c f(t)\, dt$ für $c \in \mathbb{R}_+$ nach oben beschränkt, sagen wir durch die Schranke b. Nehmen wir an, dass die Funktion f für $x \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es zu jedem $s \in \mathbb{R}_+$ ein $x \geq s$

mit $f(x) \geq \epsilon$ gibt. Wegen der Monotonie gilt auch $f(t) \geq \epsilon$ für alle $t \leq s$. Daher ist

$$\int_0^s f(t)\,dt \;\geq\; s\epsilon.$$

Wir wählen s so, dass $s\epsilon > b$ ist und erhalten einen Widerspruch.

b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die folgendermaßen definiert ist. Wenn x zu einem Intervall der Form

$$[n - \frac{1}{n^2}, n + \frac{1}{n^2}]$$

(mit einer natürlichen Zahl $n \geq 2$) gehört, so setzen wir

$$f(x) = n^2x - n^3 + 1 \text{ für } x \in [n - \frac{1}{n^2}, n] \text{ und } f(x) = -n^2x + n^3 + 1 \text{ für } x \in]n, n + \frac{1}{n^2}]$$

und 0 sonst. Dabei ist $f(n) = 1$ für natürliche Zahlen $n \geq 2$, wie sich direkt durch Einsetzen ergibt. Da andererseits $f(n + \frac{1}{2}) = 1$ ist, existiert kein Grenzwert für $x \to \infty$. Die Abbildung ist stetig, wie sich ebenfalls durch Einsetzen an den Übergangsstellen ergibt. Um zu zeigen, dass das uneigentliche Integral existiert, betrachten wir zu natürlichen Zahlen n die Integrale

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt = \int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(t)\,dt\,.$$

Da es sich um ein Dreieck mit Grundseite $2\frac{1}{n^2}$ und Höhe 1 handelt, ist dieses Integral gleich $\frac{1}{n^2}$ (man kann auch durch $\frac{2}{n^2}$ abschätzen). Daher ist

$$\int_0^{k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt = \sum_{n=2}^{k} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leq \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2}\,.$$

Da die Reihe rechts konvergiert, ist die linke Seite nach oben beschränkt, daher existiert das uneigentliche Integral.

Aufgabe 1.9. (7 (3+2+2) Punkte)

a) Zeige, dass die Fakultätsfunktion für $x \geq 1$ monoton wachsend ist.

b) Zeige, dass $10! \geq e^{11}$ gilt.

c) Zeige, dass für $x \geq 10$ die Abschätzung

$$\operatorname{Fak}(x) \geq e^x$$

gilt.

Lösung

a) Sei $x' \geq x \geq 1$. Dann ist $t^{x'} \geq t^x$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Daher ist

$$t^{x'} e^{-t} \geq t^{x'} e^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und daher überträgt sich dies auf die uneigentlichen Integrale, also

$$\operatorname{Fak}(x') = \int_0^\infty t^{x'} e^{-t}\, dt \geq \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \operatorname{Fak}(x).$$

b) Es ist $e \leq 3$. Daher ist

$$10! = 10{\cdot}9{\cdot}(8{\cdot}1){\cdot}(7{\cdot}2){\cdot}(6{\cdot}3){\cdot}(5{\cdot}4) = 10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}14{\cdot}18{\cdot}20 \geq e^2{\cdot}e^2{\cdot}e{\cdot}e^2{\cdot}e^2{\cdot}e^2 = e^{11}.$$

c) Sei $x \geq 10$. Es sei $n = \lfloor x \rfloor \leq x$. Dann ist wegen a) und b)

$$\operatorname{Fak}(x) \geq n! = n(n-1)\cdots 11 \cdot (10!) \geq e^{n-10} \cdot e^{11} = e^{n+1} \geq e^x.$$

Aufgabe 1.10. (6 (2+2+2) Punkte)

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Lösung

a) Nach dem Lösungsansatz für homogene lineare Differentialgleichungen müssen wir zuerst eine Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ bestimmen, eine solche ist $\ln t$. Die Exponentialfunktion davon ist t, so dass $y = ct$ (mit $c \in \mathbb{R}$) die Lösungen von $y' = y/t$ sind.

b) Eine Stammfunktion zu $\frac{t^7}{t} = t^6$ ist

$$\frac{1}{7}t^7\,.$$

Damit ist

$$\frac{1}{7}t^7 \cdot t = \frac{1}{7}t^8$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und somit sind

$$\frac{1}{7}t^8 + ct,\ c \in \mathbb{R},$$

alle Lösungen.

c) Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung $y(1) = 5$ erfüllt sein soll, so muss

$$\frac{1}{7} + c = 5$$

gelten, also

$$c = 5 - \frac{1}{7} = \frac{34}{7}.$$

Die Lösungs des Anfangsproblems ist also

$$y(t) = \frac{1}{7}t^8 + \frac{34}{7}t\,.$$

Aufgabe 1.11. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung $y' = t^2y^3$, $y > 0$, mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Lösung

Wir schreiben $g(t) = t^2$ und $h(y) = y^3$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t^2$ sind $\frac{1}{3}t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}t^3 + c)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{2(\frac{1}{3}t^3 + c)}} = \sqrt{\frac{-1}{\frac{2}{3}t^3 + 2c}}.$$

Bei gegebenem c ist diese Wurzel genau dann definiert, wenn

$$\frac{2}{3}t^3 + 2c < 0$$

ist. Dies bedeutet

$$t < \sqrt[3]{-3c}\,.$$

Die Definitionsbereiche sind also

$$[-\infty, \sqrt[3]{-3c}]\,.$$

Fachbereich Mathematik/Informatik **9. Juli 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer der folgenden Formel.

$$\int \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh} x)\,.$$

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	10	10	6	9	6	7	64
erhalt. Pkt.:											

Note:

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *rektifizierbare Kurve* im $\mathbb{R}^n$.
(2) Eine in einem Punkt *total differenzierbare Abbildung*.
(3) Ein *regulärer Punkt* einer total differenzierbaren Abbildung.
(4) Der *Tangentialraum* an die Faser durch einen regulären Punkt einer total differenzierbaren Abbildung.
(5) Eine *symmetrische* Bilinearform.
(6) Ein *vollständiger* metrischer Raum.
(7) Eine *stark kontrahierende Abbildung* zwischen metrischen Räumen.
(8) Eine *Fahne* in einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Lösung

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Lösung

Die Jacobi-Matrix dieser Funktion ist

$$(6x - 2y + 5, -2x - 2y)\,.$$

Wir setzen beide Komponenten gleich 0 und erhalten durch Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander die Bedingung

$$8x + 5 = 0\,,$$

also ist

$$x = -\frac{5}{8} \text{ und daher } y = \frac{5}{8}\,.$$

Der einzige kritische Punkt der Funktion ist also

$$P = (-\frac{5}{8}, \frac{5}{8})\,.$$

Wir bestimmen die Hesse-Matrix in diesem Punkt. Sie ist

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Minorenkriterium an. Der Eintrag links oben ist positiv, die Determinante ist $-12-4=-16$, also negativ. Daher besitzt die Hesse-Form den Typ $(1,1)$, und somit liegt kein lokales Extremum vor.

Aufgabe 2.3. (4 Punkte)

Berechne die Länge des Graphen der Funktion

$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 13,$$

zwischen 4 und 8.

Lösung

Es ist $f'(x) = x-1$. Daher ist die Länge des Graphen gleich dem Integral (mit der Substitution $u = x-1$)

$$\begin{aligned} \int_4^8 \sqrt{1+(x-1)^2}dx &= \int_3^7 \sqrt{u^2+1}du \\ &= \frac{1}{2}(u\sqrt{u^2+1} + \text{ arsinh } u\,)|_3^7 \\ &= \frac{1}{2}(7\sqrt{50} + \text{ arsinh } 7\; - 3\sqrt{10} - \text{ arsinh } 3\,). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.4. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Lösung

Für $n = 1$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^3,$$

bijektiv (mit der Umkehrfunktion $x \mapsto \sqrt[3]{x}$). Für ein $n \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die Abbildung

$$\varphi_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1^3, x_2, \ldots, x_n).$$

Dies ist eine polynomiale Abbildung, so dass das totale Differential durch die Jacobi-Matrix, also durch

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Für $x_1 = 0$ ist diese Matrix nicht invertierbar, da ihre Determinante 0 ist, und die Abbildung ist für diese Punkte nicht regulär. Dennoch ist die Abbildung bijektiv, die Umkehrabbildung wird durch

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (\sqrt[3]{x_1}, x_2, \ldots, x_n)$$

gegeben.

Aufgabe 2.5. (10 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Lösung

Aufgabe 2.6. (10 (1+9) Punkte)

a) Formuliere den Banachschen Fixpunktsatz.

b) Beweise die Existenzaussage im Banachschen Fixpunktsatz.

Lösung

a) Der Banachsche Fixpunktsatz besagt:

Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Sei $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M. Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \leq c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \leq c^n \cdot d(f(x), x) = c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned} & d(f^n(x), f^m(x)) \\ \leq\ & d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \ldots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\ \leq\ & a(c^{n-1} + c^{n-2} + \ldots + c^{m+1} + c^m) \\ =\ & ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c^2 + c^1 + 1) \\ \leq\ & c^m a \frac{1}{1-c}. \end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist.Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss.

Aufgabe 2.7. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ (x, y) \longmapsto (\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2}).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1, 2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Lösung

a) Wir bestimmen die Jacobi-Matrix von φ, diese ist

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & 2\frac{y}{x} \\ -2\frac{y^3}{x^3} & 3\frac{y^2}{x^2} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$-3\frac{y^4}{x^4} + 4\frac{y^4}{x^4} = \frac{y^4}{x^4}.$$

Dies ist 0 genau dann, wenn $y = 0$ ist, so dass die regulären Punkte genau die Punkte sind, deren y-Koordinate nicht 0 ist.

b) Die Abbildung ist nach Teil a) im Punkt $P = (1, 2)$ regulär, daher gibt es nach dem Satz über die Umkehrabbildung eine differenzierbare Umkehrabbildung ψ, die in einer offenen Umgebung von $\varphi(P) = (4, 8)$ definiert ist. Das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$ ist die inverse Matrix zum totalen Differential von φ in P, also invers zu

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -16 & 12 \end{pmatrix} .$$

Die inverse Matrix dazu ist

$$\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 16 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

c) Für die Punkte (x, y) mit $y \neq 0$ gibt es aufgrund des Satzes über die Umkehrabbildung lokal eine Umkehrabildung. Für einen Punkt Q mit $y = 0$ gibt es dagegen keine lokale Umkehrabbildung, da ein solcher Punkt auf der Geraden liegt, die die Faser über $(0, 0)$ ist. Daher ist diese Abbildung in keiner offenen Umgebung von Q injektiv.

Aufgabe 2.8. (9 (2+2+5) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (x^2 + y^2 + z^2, 2x + 3y + 4z).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ. Zeige, dass $P = (1, -2, 1)$ regulär ist.

b) Beschreibe für den Punkt $P = (1, -2, 1)$ den Tangentialraum an die Faser F von φ durch P.

c) Man gebe für $P = (1, -2, 1)$ einen lokalen Diffeomorphismus zwischen einem offenen Intervall und einer offenen Umgebung von P in der Faser F durch P an.

Lösung

a) Die Jacobi-Matrix der Abbildung ist

$$J = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix besitzt maximalen Rang, wenn die erste Zeile kein Vielfaches der zweiten Zeile ist. Die Bedingung lautet also

$$(x, y, z) = s(2, 3, 4),\ s \in \mathbb{R}\,.$$

D.h. die singulären Punkte der Abbildung sind die Punkte der von $(2, 3, 4)$ erzeugten Geraden. Der Punkt $P = (1, -2, 1)$ gehört nicht zu dieser Geraden, da $s(2, 3, 4) = (1, -2, 1)$ keine Lösung besitzt.

b) Der Tangentialraum an F in P ist der Kern des totalen Differentials, also der Kern von

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

Zur Bestimmung des Kerns muss man also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Durch Subtraktion der beiden Zeilen folgt $7b + 2c = 0$ und daher ist der Tangentialraum gleich der Geraden

$$\{t(-11, -2, 7),\ t \in \mathbb{R}\}\,.$$

c) Der Punkt $P = (1, -2, 1)$ wird unter der Abbildung φ auf $(6, 0)$ abgebildet. Die Faser darüber wird durch die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ und } 2x + 3y + 4z = 0$$

beschrieben. Wir lösen die lineare Gleichung nach x auf und setzen das Ergebnis

$$x = \frac{-3y - 4z}{2}$$

in die quadratische Gleichung ein. Das ergibt

$$\frac{9y^2 + 16z^2 + 24yz}{4} + y^2 + z^2 = 6$$

bzw.

$$13y^2 + 20z^2 + 24yz - 24 = 0\,.$$

Wir lösen dies nach z auf und erhalten zunächst

$$z^2 + \frac{6}{5}yz + \frac{13}{20}y^2 - \frac{6}{5} = 0$$

und durch quadratisches Ergänzen

$$(z + \frac{3}{5}y)^2 = \frac{9}{25}y^2 - \frac{13}{20}y^2 + \frac{6}{5} = -\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}\,.$$

Daraus ergibt sich

$$z = \pm\sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y\,.$$

Dabei ist die Wurzel für $-\sqrt{\frac{120}{29}} \leq y \leq \sqrt{\frac{120}{29}}$ und damit insbesondere für $y = -2$ definiert. Da für $y = -2$ ja $z = 1$ sein soll, muss man das negative Vorzeichen nehmen. Somit liefert die Abbildung

$$(-\sqrt{\frac{120}{29}}, \sqrt{\frac{120}{29}}) \mapsto \mathbb{R}^3,$$

$$y \mapsto (\frac{-3y - 4(-\sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y)}{2}, y, -\sqrt{-\frac{29}{100}y^2 + \frac{6}{5}} - \frac{3}{5}y)$$

eine Bijektion dieses offenen Intervalls mit der offenen Teilmenge der Faser F durch P, die durch $F \cap \{(x,y,z) | -\sqrt{\frac{120}{29}} < y < \sqrt{\frac{120}{29}}\}$ gegeben ist. Es ist ein Diffeomorphismus, da diese Abbildung differenzierbar ist und ihre Ableitung wegen der zweiten Komponenten nirgendwo verschwindet.

Aufgabe 2.9. (6 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = f(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Lösung

Es sei

$$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

ein Potential zu f, also eine differenzierbare Funktion, deren Gradientenfeld gleich f ist. Wir zeigen, dass sogar die zusammengesetzte Abbildung

$$g = h \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto h(\varphi(t)),$$

injektiv ist. Aufgrund der Kettenregel ist die Ableitung dieser Abbildung gleich

$$g'(t) = (Dh)_{\varphi(t)} \circ (D\varphi)_t = (Dh)_{\varphi(t)}(\varphi'(t))\,.$$

Nach Fakt steht $\varphi'(t) \neq 0$ senkrecht auf dem Tangentialraum zu h im Punkt $\varphi(t)$. Insbesondere gehört $\varphi'(t)$ nicht zum Tangentialraum (da das Skalarprodukt positiv definit ist), also nicht zum Kern von $(Dh)_{\varphi(t)}$. Daher ist

$$g'(t) \;=\; (Dh)_{\varphi(t)}(\varphi'(t)) \;\neq\; 0.$$

D.h. dass $g'(t)$ keine Nullstelle besitzt und daher ist g nach Fakt streng wachsend oder streng fallend, also injektiv.

Aufgabe 2.10. (7 (5+2) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Lösung

a) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix. Das charakteristische Polynom davon ist

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} \;=\; (\lambda-2)(\lambda-4) - 3 \;=\; \lambda^2 - 6\lambda + 5 \;=\; (\lambda-1)(\lambda-5).$$

Daher sind 1 und 5 die Eigenwerte, und daher ist die Matrix diagonalisierbar.

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 1 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 und damit die erste Fundamentallösung

$$e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert 5 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Dies ergibt den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 5 und damit die zweite Fundamentallösung

$$e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Die allgemeine Lösung hat demnach die Form

$$ae^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + be^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^t + be^{5t} \\ -ae^t + 3be^{5t} \end{pmatrix} , \; a, b \in \mathbb{R} .$$

b) Um das Anfangsproblem zu lösen müssen wir a und b so bestimmen, dass

$$\begin{pmatrix} a + b \\ -a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

ist. Dies ist ein lineares Gleichungssystem, Addition führt auf

$$4b = 9 ,$$

also $b = \frac{9}{4}$ und daher $a = -\frac{1}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$-\frac{1}{4}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{9}{4}e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- CC-BY-SA-3.0: Creative Commons Attribution ShareAlike 3.0
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Integral as region under curve.svg, Autor = Benutzer 4C auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 7

Quelle = Histogram example.svg, Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 8

Quelle = Integral approximations.svg, Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-vy-sa 3.0 10

Quelle = GodfreyKneller-IsaacNewton-1689.jpg , Autor = Godfrey Kneller, Lizenz = PD 18

Quelle = Gottfried Wilhelm Leibniz c1700.jpg, Autor = Johann Friedrich Wentzel d. Ä. (= Benutzer AndreasPraefcke auf Commons), Lizenz = PD 18

Quelle = John Wallis.jpg, Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 23

Quelle = Improper integral.svg, Autor = Benutzer KSmrq auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 46

Quelle = Zeta.svg, Autor = Benutzer WhiteTimberwolf auf Commons, Lizenz = PD 51

Quelle = Factorial plot.png, Autor = Mathacw, Lizenz = 52

Quelle = Taraxacum sect Ruderalia13 ies.jpg, Autor = Frank Vincentz, Lizenz = CC-by-sa 3.0 53

Quelle = Logistic-curve.svg, Autor = Benutzer auf Commons, Lizenz = 65

Quelle = ComplexSinInATimeAxe.gif, Autor = Nashev, Lizenz = 67

Quelle = Cycloid f.gif, Autor = Benutzer Zorgit auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 78

Quelle = Monkey Saddle Surface (Shaded).png, Autor = Benutzer Inductiveload auf Commons, Lizenz = PD 79

Quelle = Feldberg 3913.jpg, Autor = Benutzer Flominator auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 79

Quelle = Schoenberg-ebringen-isohypsen.png, Autor = Benutzer W-j-s auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 97

Quelle = James Joseph Sylvester.jpg, Autor = nicht bekannt, Lizenz = PD 103

Quelle = Passaggio in coordinate polari.svg, Autor = Benutzer Cronholm144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 122

Quelle = Rynda Bay Beach.jpg, Autor = Benutzer Straitgate auf Commons, Lizenz = PD 124

Quelle = Agate1 hg.jpg, Autor = Benutzer Hgrobe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5 126

Quelle = VectorField.svg, Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD 131

Quelle = RLipschitz.jpeg, Autor = Benutzer Ahellwig auf Commons, Lizenz = PD 133

Quelle = Gradient field.png, Autor = Benutzer Christophe.Finot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 142

Quelle = Simple Harmonic Motion Orbit.gif, Autor = Benutzer Mazemaster auf Commons, Lizenz = PD 144

Quelle = 149px-Animation Drap Allemagne T.gif, Autor = Benutzer MG auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 149

Quelle = Steuertabelle 2009 single zve 55.jpg, Autor = Benutzer Udo.Brechtel auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 160

Quelle = Funktion.Flaechenvariation.png, Autor = M. Gausmann, Lizenz = CC-by-sa 3.0 174

Quelle = Cusp.png, Autor = Benutzer Satipatthana auf Commons, Lizenz = PD 187

Quelle = Helix2.png, Autor = Benutzer Siebrand auf nl Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 189

Quelle = Soccer field - empty.svg, Autor = Benutzer Nuno Tavares auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 221

Quelle = BodyMassIndex.png, Autor = Benutzer Thire auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.5 228