Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 28

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x\,|x|,$$

differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 28.2. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade}, \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, \text{ falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade}, \end{cases}$$

definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 28.3. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f : [-2, 5] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 28.4. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$

Finde die Punkte $a \in [-3, 3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 28.5. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ maximal $d - 1$ Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Abschnitte unterteilen lassen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 28.6. Beweise Satz 28.7.

Aufgabe 28.7. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

mittels Polynomdivision (vgl. Beispiel 28.9).

Aufgabe 28.8. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{x^2 + x}$$

im Punkt $a = -1$.

Aufgabe 28.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und es sei

$$D(I, \mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R} | \, f \text{ differenzierbar}\}$$

die Menge der differenzierbaren Funktionen. Zeige, dass $D(I, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung

$$D(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I, \mathbb{R}), \, f \longmapsto f',$$

eine lineare Abbildung ist. Bestimme den Kern dieser Abbildung und seine Dimension.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.10. (3 Punkte)

Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion

$$f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 28.11. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = \frac{2x - 3}{5x^2 - 3x + 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 28.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 28.13. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 28.14. (4 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass f Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 28.15. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt $a = 1$.