

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 20

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 20.1. Sei K ein Körper und sei $R_i \subseteq K$, $i \in I$, eine Familie von normalen Unterringen. Zeige, dass auch der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ normal ist.

AUFGABE 20.2. Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass R genau dann normal ist, wenn er mit seiner Normalisierung übereinstimmt.

AUFGABE 20.3. Sei R ein Integritätsbereich. Sei angenommen, dass die Normalisierung von R gleich dem Quotientenkörper $Q(R)$ ist. Zeige, dass dann R selbst schon ein Körper ist.

AUFGABE 20.4.*

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Zeige, dass die Nenneraufnahme R_f ebenfalls normal ist.

AUFGABE 20.5. Sei R ein normaler Integritätsbereich und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass dann auch die Nenneraufnahme R_S normal ist.

AUFGABE 20.6. Sei M ein torsionsfreies Monoid. Zeige, dass dann auch die Differenzgruppe $\Gamma(M)$ torsionsfrei ist.

AUFGABE 20.7. (3 Punkte)

Sei M ein kommutative Gruppe. Zeige, dass die Torsionsfreiheit von M äquivalent zu folgender Eigenschaft ist: Aus $m \in M$ und $rm = 0$ für ein positives $r \in \mathbb{N}$ folgt stets $m = 0$. Zeige ferner, dass diese Äquivalenz für ein Monoid nicht gelten muss.

AUFGABE 20.8. Sei R ein Integritätsbereich mit Normalisierung R^{norm} . Zeige, dass durch

$$\mathfrak{f} = \{g \in R \mid gR^{\text{norm}} \subseteq R\}$$

ein Ideal in R gegeben ist.

AUFGABE 20.9. Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ ein numerisches Monoid, das von teilerfremden natürlichen Zahlen erzeugt werde. Zeige, dass für das Führungsideal des zugehörigen Monoidrings $K[M]$ die Beziehung

$$\mathfrak{f} = (M_{\geq f})$$

besteht, wobei f die Führungszahl des Monoids bezeichnet.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 20.10. (3 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $R \subseteq S$ eine ganze Ringerweiterung. Sei $f \in R$. Zeige, dass für das von f erzeugte Hauptideal gilt:

$$R \cap (f)S = (f)R.$$

AUFGABE 20.11. (6 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich. Zeige, dass dann auch der Polynomring $R[X]$ normal ist.

AUFGABE 20.12. (5 Punkte)

Sei R ein normaler Integritätsbereich und $a \in R$. Es sei vorausgesetzt, dass a keine Quadratwurzel in R besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^2 - a$ prim in $R[X]$ ist. Tipp: Verwende den Quotientenkörper $Q(R)$. Warnung: prim muss hier nicht äquivalent zu irreduzibel sein.

AUFGABE 20.13. (4 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) R ist normal
- (2) Für jedes Primideal \mathfrak{p} ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ normal.
- (3) Für jedes maximale Ideal \mathfrak{m} ist die Lokalisierung $R_{\mathfrak{m}}$ normal.

(Man sagt daher, dass normal eine *lokale Eigenschaft* ist.)

AUFGABE 20.14. (2 Punkte)

Sei $M \subseteq \Gamma(M) \cong \mathbb{Z}^n$ ein Monoid und betrachte die Menge

$$M^* = \{\varphi : \Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \mid \varphi(M) \subseteq \mathbb{N}\} .$$

Zeige, dass M^* ein normales Untermonoid von $\text{Hom}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ ist.

(Dieses Monoid nennt man das *duale Monoid* zu M .)

AUFGABE 20.15. (3 Punkte)

Betrachte Beispiel 20.11. Welchen Wert haben die drei Erzeuger unter den dort angegebenen Monoidhomomorphismen φ_1, φ_2 nach \mathbb{Z} , durch die das Monoid beschrieben werden kann. Bestimme den Kokern des Gruppenhomomorphismus

$$\Gamma(M) \longrightarrow \mathbb{Z}^2, m \longmapsto (\varphi_1(m), \varphi_2(m)) .$$

(Diesen Kokern nennt man die *Divisorenklassengruppe* des Monoidringes.)