Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 66

Es ist unser Ziel zu zeigen, dass auf der Produktmenge von Maßräumen unter recht allgemeinen Voraussetzungen ein Maß definiert ist, das durch die Produktwerte auf den Quadern festgelegt ist. Dafür gehen wir den Weg über den Produkt-Präring.

Produkt-Präringe

DEFINITION 66.1. Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1), \ldots, (M_n, \mathcal{P}_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann nennt man den von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{P}_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

erzeugten Präring den *Produkt-Präring* der $(M_i, \mathcal{P}_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

LEMMA 66.2. *Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1), \ldots, (M_n, \mathcal{P}_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann besteht der Produkt-Präring aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern.*

Beweis. Die Quader $S_1 \times \cdots \times S_n$ mit $S_i \in \mathcal{P}_i$ gehören zum Produkt-Präring, und damit auch endliche Vereinigungen davon. Wir müssen also zeigen, dass das angegebene Mengensystem $\mathcal{H}$ (das aus den endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern besteht) ein Präring ist. Wir beschränken uns dabei auf den Fall von zwei Mengen $(M, \mathcal{P})$ und $(N, \mathcal{R})$, der allgemeine Fall folgt daraus durch Induktion. Die leere Menge ist als leerer Quader in $\mathcal{H}$ enthalten. Wir diskutieren zunächst die Mengenoperationen für zwei Quader $S_1 \times T_1$ und $S_2 \times T_2$. Der Durchschnitt davon ist gleich $(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2)$, also wieder ein Quader. Für die Vereinigung gilt

$$\begin{aligned}(S_1 \times T_1) \cup (S_2 \times T_2)& \\ &= ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cup T_2)) \uplus ((S_2 \setminus S_1) \times T_2),\end{aligned}$$

was eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern ist. Für die Differenzmenge ist

$$(S_1 \times T_1) \setminus (S_2 \times T_2) = ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \setminus T_2))$$

ebenfalls eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Es seien nun zwei disjunkte endliche Vereinigungen von Quadern, $V_1 = \biguplus_{i \in I} Q_i$ und $V_2 = \biguplus_{j \in J} L_j$, gegeben. Dann ist

$$V_1 \setminus V_2 = \left(\biguplus_{i \in I} Q_i\right) \setminus \left(\biguplus_{j \in J} L_j\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \biguplus_{i\in I}(Q_i \setminus (\biguplus_{j\in J} L_j)) \\
&= \biguplus_{i\in I}((Q_i \setminus L_{j_0}) \setminus (\biguplus_{j\in J,\, j\neq j_0} L_j)).
\end{aligned}
$$

Nach der obigen Überlegung ist $Q_i \setminus L_{j_0}$ eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Diese kann man vorziehen, und die Behauptung folgt durch Induktion über die Anzahl von J. Für die Vereinigung ist

$$V_1 \cup V_2 \;=\; (\biguplus_{i\in I} Q_i) \cup (\biguplus_{j\in J} L_j)$$

eine endliche Vereinigung von Quadern. Durch Induktion über die Anzahl der Quader kann man unter Verwendung der obigen Überlegung für zwei Quader zeigen, dass man dies auch als eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen kann. $\square$

Der obige Beweis beeinhaltet insbesondere, dass man jede endliche Vereinigung von Quadern als eine endliche disjunkte Vereinigung schreiben kann.

Produktmaße

LEMMA 66.3. *Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1, \mu_1), \ldots, (M_n, \mathcal{P}_n, \mu_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen und Prämaßen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die für eine endliche disjunkte Vereinigung $V = \biguplus_{i\in I} Q_i$ von Quadern $Q_i = S_{i1} \times \cdots \times S_{in}$ durch*

$$\mu(V) = \sum_{i\in I} \mu(Q_i)$$

mit $\mu(Q_i) = \mu_1(S_{i1}) \cdots \mu_n(S_{in})$ definierte Zahl ist unabhängig von der gewählten Zerlegung.

(2) *Seien $\mu_i(M_i) < \infty$ (insbesondere sei dies definiert). Dann ist die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ ein Prämaß auf dem Produkt-Präring.*

Beweis. Wir beschränken uns im Beweis auf zwei Mengen $(M, \mathcal{P}, \pi)$ und $(N, \mathcal{R}, \rho)$, die allgemeine Aussage folgt daraus durch Induktion. Seien

$$V \;=\; \biguplus_{i\in I} Q_i \;=\; \biguplus_{j\in J} L_j$$

zwei Darstellungen einer Menge V als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Wir müssen $\sum_{i \in I} \mu(Q_i) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$ zeigen. Für jeden Quader Q_i ist insbesondere $Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} L_j$. Damit ist auch

$$Q_i = Q_i \cap (\biguplus_{j \in J} L_j) = \biguplus_{j \in J} (Q_i \cap L_j).$$

Wir können nach Lemma 66.2 die Durchschnitte rechts als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern schreiben. Damit erhalten wir eine dritte Darstellung von V, die beide Darstellungen verfeinert. Daher können wir gleich annehmen, dass jedes L_j Teilmenge eines Q_i ist. Dann ist insbesondere $Q_i = \biguplus_{j \in J_i} L_j$ mit einer gewissen Teilmenge $J_i \subseteq J$, wobei die J_i für verschiedene i disjunkt sind. Es genügt also, für einen Quader

$$Q = A \times B = \biguplus_{j \in J} L_j$$

die Gleichheit $\mu(Q) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$ zu zeigen. Da J endlich ist, sind überhaupt nur endlich viele Seiten S_j aus $\mathcal{P}$ und T_j aus $\mathcal{R}$ an diesen überdeckenden Quadern beteiligt. Aus diesen Seiten kann man ein Mengensystem $\mathcal{S}$ bilden, das aus allen möglichen Durchschnitten der S_j und ihrer Komplemente $A \setminus S_j$ besteht, und ein Mengensystem $\mathcal{T}$ bilden, das aus allen möglichen Durchschnitten der T_j und ihrer Komplemente $B \setminus T_j$ besteht. Diese Mengen seien mit S_λ, $\lambda \in \Lambda$, und T_γ, $\gamma \in \Gamma$, bezeichnet. Damit kann man jeden Quader L_j als eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern der Form $S_\lambda \times T_\gamma$ schreiben (das bedeutet, dass wir ein „Raster“ einführen), und jeder dieser Quader kommt in genau einem L_j vor. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mu(Q) &= \pi(A) \cdot \rho(B) \\
&= \pi(\biguplus_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda) \cdot \rho(\biguplus_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma) \\
&= (\sum_{\lambda \in \Lambda} \pi(S_\lambda)) \cdot (\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(T_\gamma)) \\
&= \sum_{(\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \pi(S_\lambda) \cdot \rho(T_\gamma) \\
&= \sum_{(\lambda,\gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \mu(S_\lambda \times T_\gamma) \\
&= \sum_{j \in J} \mu(L_j)
\end{aligned}$$

(2). Es sei $V = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} V_n$ eine abzählbare disjunkte Vereinigung, wobei V und die V_n endliche disjunkte Vereinigungen von Quadern sind. Wir müssen $\mu(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n)$ zeigen. Dies kann man direkt auf den Fall zurückführen, wo $V = Q$ und $V_n = Q_n$ Quader sind. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M \times N$ und zu $x \in M$ betrachten wir

$$T(x) = \{ y \in N \,|\, (x, y) \in T \}.$$

Wenn T zum Produkt-Präring gehört, also eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern ist, so gehören diese Mengen zu $\mathcal{R}$, da sie eine endliche Vereinigung gewisser (N-)Seiten dieser Quader sind. Zu einer positiven reellen Zahl a kann man die Menge

$$T^a = \{x \in M \mid \rho(T(x)) = a\}$$

betrachten. Dies Menge ist wiederum eine endliche Vereinigung von (M-)Seiten der beteiligten Quader und gehört somit zu $\mathcal{P}$. Weiterhin kann $T^a \neq \emptyset$ nur für endlich viele Werte $a \in \mathbb{R}$ sein, nämlich nur für die Summen der Werte des (ρ-)Prämaßes der (N-)Seiten der beteiligten Quader. Mit diesen Notationen gilt

$$\mu(T) = \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T^a) \cdot a,$$

da dies für jeden Quader gilt und daraus durch Aufsummieren folgt. Sei also nun $Q = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ eine abzählbare Zerlegung in Quader. Wir müssen

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(Q_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \mu(Q_i) \\ &= \lim_{n \to \infty} \mu(Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_n) \end{aligned}$$

zeigen. Nach Übergang zu den Komplementen in Q ist dies äquivalent damit, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mu(T_n) = 0$$

ist für $T_n = Q \setminus (Q_0 \uplus \ldots \uplus Q_n)$. Es ist $T_n \downarrow \emptyset$, und damit ist auch $T_n(x) \downarrow \emptyset$ für jedes $x \in M$. Nach Lemma 64.4 ist daher $\lim_{n \to \infty} \rho(T_n(x)) = 0$. Zu $\delta > 0$ definieren wir

$$T_n^{\geq \delta} = \{x \in M \mid \rho(T_n(x)) \geq \delta\} = \bigcup_{a \geq \delta} T_n^a.$$

Da für jedes $x \in M$ die Folge $\rho(T_n(x))$ gegen 0 konvergiert, schrumpft die Mengenfolge $T_n^{\geq \delta}$ für jedes $\delta > 0$ gegen $\emptyset$. Daraus folgt, wieder mit Lemma 64.4, dass $\lim_{n \to \infty} \pi(T_n^{\geq \delta}) = 0$. Seien nun $\delta, \epsilon > 0$ gegeben. Zu ϵ gibt es ein n_0 mit $\pi(T_n^{\geq \delta}) \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Für diese n hat man dann insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(T_n) &= \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T_n^a) \cdot a \\ &= (\sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a) + (\sum_{a \geq \delta} \pi(T_n^a) \cdot a) \\ &\leq (\sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a) + (\sum_{\rho(N) \geq a \geq \delta} \pi(T_n^{\geq \delta}) \cdot a) \\ &\leq \pi(M) \cdot \delta + \epsilon \cdot \rho(N). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\pi(M)$ und $\rho(N)$ endlich sind, kann man den letzten Term durch geeignete Wahl von δ und ϵ beliebig klein machen. Daher konvergiert $\mu(T_n)$ gegen 0. □

Satz 66.4. *Es seien n σ-endliche Maßräume $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \ldots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ gegeben. Dann gibt es genau ein (σ-endliches) Maß μ auf der Produkt- σ-Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$, das für alle messbaren Quader den Wert*

$$\mu(T_1 \times \cdots \times T_n) \,=\, \mu_1(T_1) \cdots \mu_n(T_n)$$

besitzt.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall von zwei σ-endlichen Maßräumen $(M, \mathcal{A}, \pi)$ und $(N, \mathcal{B}, \rho)$. Es seien M_n, $n \in \mathbb{N}$, bzw. N_n, $n \in \mathbb{N}$, jeweils Ausschöpfungen der Räume durch Teilmengen mit endlichem Maß. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 64.7, da das Maß auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem aller Quader festgelegt ist, und die Mengen $M_n \times N_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung des Produktraumes mit endlichem Maß bilden.

Zur Existenz. Wir ersetzen zuerst die Ausschöpfungen durch disjunkte Ausschöpfungen. Dann bilden die $M_i \times N_j$, $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine disjunkte Ausschöpfung von $M \times N$. Da ein Maß durch die Einschränkungen auf einer abzählbaren disjunkten Vereinigung eindeutig bestimmt ist, genügt es, auf jedem $M_i \times N_j$ ein Maß zu konstruieren. D.h. wir können annehmen, dass die Maße π und ρ endlich sind. Es sei $\mathcal{H}$ der Produkt-Präring auf $M \times N$. Nach Lemma 66.3 gibt es auf diesem Mengensystem ein wohldefiniertes Prämaß, das auf den Quadern durch das Produkt der Seitenmaße gegeben ist. Aufgrund von Satz 65.7 kann man dieses Prämaß zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ fortsetzen. □

Definition 66.5. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \ldots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ σ-endliche Maßräume. Dann nennt man das in Lemma 66.3 und Satz 66.4 konstruierte Maß das *Produkt-Maß* auf $M_1 \times \cdots \times M_n$. Es wird mit $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ bezeichnet.

Abbildungsverzeichnis