Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i, $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

Aufgabe 5.3. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 4.4) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G,\ n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 5.12.

In der folgenden Aufgabe wird das *Zentrum* einer Gruppe verwendet.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G \mid gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Aufgabe 5.4. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa : G \longrightarrow \operatorname{Aut}(G),\ g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

Aufgabe 5.5. Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Perm}(M_i)$$

eine Untergruppe von $\operatorname{Perm}(M)$ ist.

Aufgabe 5.6. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_σ ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\sigma(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge null sind. Zeige, dass

$$\det(M_\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

ist.

Aufgabe 5.7. Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgabe 5.8. Es sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeige, dass für zueinander konjugierte Matrizen M und N aus $\mathrm{GL}_n(K)$ die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.9. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph sind.

Aufgabe 5.10. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation R auf G, wobei xRy bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus κ_g gibt mit $x = \kappa_g(y)$. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

Aufgabe 5.11. (2 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

Aufgabe 5.12. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 5.13. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.14. (5 Punkte)

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 3 an.