Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Arbeitsblatt 27

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 27.1. Bestimme die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$
für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 27.2. Bestimme die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = x^n$$
für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 27.3. Bestimme die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$
für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 27.4. Bestimme die Ableitung der Funktion
$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^q,$$
für jedes $q \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 27.5. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$
im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 27.6. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 27.7. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 27.8. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 27.9. Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 27.10. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ genau dann den Grad d besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d{+}1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Bei der „linearen Approximation“ von differenzierbaren Abbildungen kommen sogenannte affin-lineare Abbildungen vor.

Es sei K ein Körper und es seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung

$$\alpha : V \longrightarrow W,\, v \longmapsto \alpha(v) = \varphi(v) + w,$$

wobei φ eine lineare Abbildung und $w \in W$ ein Vektor ist, heißt *affin-linear*.

Aufgabe 27.11. Es sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum. Zeige, dass es zu zwei Vektoren $u, v \in W$ genau eine affin-lineare Abbildung

$$\alpha : K \longrightarrow W$$

gibt mit $\alpha(0) = u$ und $\alpha(1) = v$.

Aufgabe 27.12. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\alpha(0) = (2, 3, 4)$ und $\alpha(1) = (5, -2, -1)$.

Aufgabe 27.13. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.14. (5 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ und sei für jedes $i \in \{0, \ldots, n\}$ eine konvergente Folge

$$(c_{in})_{n \in \mathbb{N}}$$

in $\mathbb{C}$ gegeben, deren Limes mit c_i bezeichnet sei. Wir betrachten die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Polynomen vom Grad $\leq d$, die durch

$$f_n := c_{dn}x^d + c_{d-1\,n}x^{d-1} + \ldots + c_{2n}x^2 + c_{1n}x + c_{0n}$$

definiert sind. Zeige, dass diese Funktionenfolge auf jeder kompakten Kreisscheibe $B(0, r)$ gleichmäßig gegen

$$f = c_d x^d + c_{d-1}x^{d-1} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

konvergiert.

Aufgabe 27.15. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 27.16. (4 Punkte)

Bestimme, ob die komplexe Konjugation

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \overline{z},$$

differenzierbar ist oder nicht.

Aufgabe 27.17. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{K}$ offen, und

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n\,.$$

Aufgabe 27.18. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgabe 27.19. (4 Punkte)

Es sei

$$F : D \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine (höhere) Ableitung gibt mit $F^{(n)} = 0$.