Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 50

Aufwärmaufgaben

Wenn in den folgenden Aufgaben nach Extrema gefragt wird, so ist damit gemeint, dass man die Funktionen auf (isolierte) lokale und globale Extrema untersuchen soll. Zugleich soll man, im differenzierbaren Fall, die kritischen Punkte bestimmen.

Aufgabe 50.1. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^2,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.2. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 - y^4,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.3. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 5xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.4. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2x^2 + 3y^2 + 4xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.5. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy^2 - x^3y,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.6. Bestimme für die Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy\sqrt{3 - x^2 - y^2},$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und untersuche die Funktion auf Extrema.

Aufgabe 50.7.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto (3x^2 - 2xy - y^2 + 5x),$$

und entscheide, ob in diesen kritischen Punkten ein lokales Extremum vorliegt.

Aufgabe 50.8.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

Aufgabe 50.9.*

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ definierten Funktion

$$f\colon B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2 + y^3 - y^2 - y.$$

Aufgabe 50.10.*

Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y,z) \longmapsto \frac{xz}{x^2 + y^2}$$

(es ist also $y > 0$).

a) Berechne die partiellen Ableitungen von f und stelle den Gradienten zu f auf.

b) Bestimme die isolierten lokalen Extrema von f.

Aufgabe 50.11.*

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto -3x^2 + 2xy - 7y^2 + x,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.12. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.13.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welche $x, y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 50.14. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gibt mit

$$\langle v_i, v_j \rangle \,=\, \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 50.15. Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthogonalbasis auf V mit der Eigenschaft $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist.

Aufgabe 50.16. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge $1, -1$ oder 0 sind.

Aufgabe 50.17. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 50.18. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, dass die Hesse-Form von f in jedem Punkt $P \in G$ symmetrisch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 50.19. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 50.20. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum V mit einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf V und einer Basis $u_1, \ldots, u_n$ von V derart, dass $\langle u_i, u_i \rangle > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ ist, aber $\langle -, - \rangle$ nicht positiv definit ist.

Aufgabe 50.21. (4 Punkte)

Sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Untersuche die Funktion

$$f\colon I \times I \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \frac{\cos x}{\cos y},$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.22. (4 Punkte)

Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + 9y^2 + 6xy,$$

auf Extrema.

Aufgabe 50.23. (5 Punkte)

Sei

$$h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und betrachte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto h(x^2 + y^2).$$

Zeige, dass f allenfalls im Nullpunkt $(0, 0)$ ein isoliertes lokales Extremum besitzen kann, und dass dies genau dann der Fall ist, wenn h in 0 ein isoliertes lokales Extremum besitzt.