Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematatik für Anwender I

Arbeitsblatt 24

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2+3x-4}{x-1}\, dx .$$

Aufgabe 24.2. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt .$$

Aufgabe 24.3. Ein Körper werde zum Zeitpunkt 0 losgelassen und falle luftwiderstandsfrei aus einer gewissen Höhe unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde nach unten. Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach welcher Zeit hat der Körper 100 Meter zurückgelegt?

Aufgabe 24.4. Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 24.5. Es sei $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 24.6. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x)dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 24.7. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Aufgabe 24.8. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 24.9. Seien

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.10. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb[1] des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

Aufgabe 24.11. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x+1}\, dx\,.$$

[1]Gemeint ist hier der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Aufgabe 24.12. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\,.$$

Aufgabe 24.13. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x)=x^2 \text{ und } g(x)=-2x^2+3x+4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R},\, t\longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t)=\begin{cases}0 \text{ für } t=0,\\ \sin\frac{1}{t} \text{ für } t\neq 0\,.\end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x)=x^2\cos\frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 24.15. (3 Punkte)

Es seien

$$f,g\colon [a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t)\geq 0$ für alle $t\in[a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s\in[a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(s)\int_a^b g(t)\,dt\,.$$