Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Begründe, warum der Ring

$$\mathbb{Z}[X,Y,Z,W]/(XY-ZW, 5X^8-YZ^3+2WXY)$$

noethersch ist.

Aufgabe 9.2. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 9.3. Sei K ein Körper und sei

$$K[X_n,\, n\in\mathbb{N}]$$

der Polynomring über K in unendlich vielen Variablen. Man beschreibe darin ein nicht endlich erzeugtes Ideal und eine unendliche, echt aufsteigende Idealkette.

Aufgabe 9.4. Man gebe ein Beispiel eines nicht-noetherschen Ringes, dessen Reduktion ein Körper ist.

Aufgabe 9.5. Wir betrachten auf- und absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen in $\mathbb{A}_K^n$ und von Idealen in $K[X_1,\ldots,X_n]$. Zeige die folgenden Aussagen. a) Für einen endlichen Körper wird jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. b) Für einen unendlichen Körper und $n\geq 1$ wird nicht jede aufsteigende Kette

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots$$

von affin-algebraischen Mengen stationär. c) Für (einen beliebigen Körper und) $n \geq 1$ wird nicht jede absteigende Idealkette

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \ldots$$

stationär. d) Für einen unendlichen Körper und $n \geq 1$ gibt es echt absteigende Ketten von affin-algebraischen Mengen beliebiger Länge.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.6. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei I ein Ideal mit dem Restklassenring $S = R/I$. Zeige, dass die Ideale von S eindeutig denjenigen Idealen von R entsprechen, die I umfassen.

Zeige, dass das Gleiche gilt für Primideale, Radikalideale und maximale Ideale.

Aufgabe 9.7. (4 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{Q}$ keine Algebra von endlichem Typ über $\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 9.8. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $A = K[X, Y]$. Finde eine K-Unteralgebra von A, die nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 9.9. (4 Punkte)

Es seien $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Diskutiere, wie sich die verschiedenen Äquivalenzbegriffe aus der siebten Vorlesung für F und G (und für $V(F)$ und $V(G)$) unter dem Körperwechsel verhalten.

Aufgabe 9.10. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I. Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination mit dem konstruierten Erzeugendensystem.

Aufgabe 9.11. (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Zeige, dass sich jedes Element aus R als ein Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt.