Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Finde primitive Elemente in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$, $\mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 2. Es seien $n_1, \ldots, n_k$ positive natürliche Zahlen und es sei

$$G = \mathbb{Z}/(n_1) \times \mathbb{Z}/(n_2) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_k)$$

die Produktgruppe. Bestimme den Exponenten von G.

Aufgabe 3. Konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_9$ mit 9 Elementen.

Aufgabe 4. Bestimme in $\mathbb{F}_9$ für jedes Element die multiplikative Ordnung. Gib insbesondere die primitiven Elemente an.

Aufgabe 5. Es sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}/(3)[Z]/(Z^2+1)$ der Körper mit 9 Elementen (z bezeichne die Restklasse von Z). Führe in $\mathbb{F}_9[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = X^3 + zX^2 + 1 + z$ und $T = zX^2 + (z+2)X + 2$ durch.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass die beiden folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(1) K ist algebraisch abgeschlossen.
(2) Jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Finde primitive Elemente in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(13)$, $\mathbb{Z}/(17)$ und $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Zeige, dass für natürliche Zahlen k und n mit $k \,|\, n$ der kanonische Homomorphismus

$$(\mathbb{Z}/(n))^\times \to (\mathbb{Z}/(k))^\times$$

surjektiv ist.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Konstruiere zu einer Primzahl p einen Körper mit p^2 Elementen.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und F ein Körper mit p^2 Elementen. Welche Ringhomomorphismen zwischen $\mathbb{Z}/(p^2)$ und F gibt es? Man betrachte beide Richtungen.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32$ und 49 Elementen.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}/(3)[Z]/(Z^2+1)$ der Körper mit 9 Elementen (z bezeichne die Restklasse von Z). Führe in $\mathbb{F}_9[X]$ die Division mit Rest „P durch T" für die beiden Polynome $P = X^4 + (1+2z)X^3 + zX^2 + 2X + 2 + z$ und $T = (z+1)X^2 + zX + 2$ durch.

Aufgabe 14. (4 Punkte)

Finde einen Erzeuger der Einheitengruppe eines Körpers mit 25 Elementen. Wie viele solche Erzeuger gibt es?