Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2011**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 14

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass man in Satz 14.3 nicht auf die Bedingung der Irreduzibilität verzichten kann.

Aufgabe 14.2. Zeige, dass man in Satz 14.3 die äquivalenten Bedingungen durch die folgende Eigenschaft ergänzen kann:

Zu jeder Körpererweiterung $K \subseteq M$ und zu zwei K-Algebra-Homomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2 : L \longrightarrow M$$

ist $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$.

Aufgabe 14.3. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die in $\mathbb{Q}$ keine dritte Wurzel besitzt, so dass $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ ein Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 14.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist. Man gebe die verschiedenen Einbettungen von L in $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 14.4. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und es sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - q$. Welchen Grad besitzt L (über $\mathbb{Q}$)? Man gebe für jeden möglichen Grad Beispiele an.

Tipp: Man betrachte eine Einbettung $L \subseteq \mathbb{C}$ und den Durchschnitt $L \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.5. Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper, der über K nicht normal sei. Zeige, dass es einen weiteren Zwischenkörper $M' \neq M$ gibt, der zu M isomorph ist.

Aufgabe 14.6. Finde für den Körper L aus Beispiel 14.9 eine endliche Körpererweiterung $L \subseteq L'$ mit $L' \subseteq \mathbb{C}$ und so, dass L' über $\mathbb{Q}$ normal ist. Beschreibe einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\varphi : L' \to L'$ mit $\varphi(L) \neq L$.

Aufgabe 14.7. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq M$ aus Beispiel 14.9. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 14.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist.

Aufgabe 14.8. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 14.9. Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_9$ untereinander konjugiert sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.10. (4 Punkte)

Man gebe in jeder Charakteristik Beispiele für eine normale Körpererweiterung $K \subseteq L$ vom Grad 3.

Aufgabe 14.11. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien M_1, M_2 Zwischenkörper, die beide über K normal seien. Zeige, dass auch $K \subseteq M_1 \cap M_2$ normal ist.

Aufgabe 14.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine normale Körpererweiterung ist.

Aufgabe 14.13. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale und separable Körpererweiterung. Es sei $x \in L$ mit $x^n = a \in K$, wobei $\operatorname{grad}_K K(x) = n$ sei. Zeige, dass L n verschiedene n-te Einheitswurzeln besitzt.

Aufgabe 14.14. (4 Punkte)

Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_8$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_8$ untereinander konjugiert sind.