

## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 16

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 16.1. Sei  $X = K\text{-Spek}(R)$  das  $K$ -Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen  $K$ -Algebra. Dann wird ein irreduzibler Filter durch offene Mengen der Form  $D(f)$  erzeugt.

AUFGABE 16.2. Sei  $U$  eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $K$ . Zeige, dass die Einheiten in  $\Gamma(U, \mathcal{O})$  den Morphismen von  $U$  nach  $\mathbb{A}_K^\times = \mathbb{A}_K^1 \setminus \{0\}$  entsprechen.

AUFGABE 16.3. Sei  $U$  eine quasiaffine Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper und sei

$$\psi: U \longrightarrow \mathbb{A}_K^n$$

ein Morphismus. Zeige, dass  $\psi$  genau dann durch die abgeschlossene Menge  $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$  faktorisiert, wenn  $\mathfrak{a}$  im Kern des globalen Ringhomomorphismus

$$\tilde{\psi}: K[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O})$$

liegt.

AUFGABE 16.4. Sei  $X = K\text{-Spek}(R)$  eine affine Varietät und  $Z \subseteq X$  eine abgeschlossene Teilmenge. Zeige, dass der Umgebungsfilter  $U(Z)$  von offenen Mengen der Form  $D(f)$  erzeugt wird.

AUFGABE 16.5. Sei  $X$  ein topologischer Raum. Zeige, dass ein Ultrafilter irreduzibel ist.

AUFGABE 16.6. Man beschreibe einen  $K$ -Algebra-Homomorphismus derart, dass die induzierte Abbildung der  $K$ -Spektra die Addition auf  $K$  beschreibt.

AUFGABE 16.7. Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass die Addition, die Multiplikation, das Negative, das Inverse und die Division in  $K$  sich als Morphismen realisieren lassen.

AUFGABE 16.8. Sei  $M$  ein kommutatives Monoid. Finde eine allgemeine Definition von *Filter* derart, dass einerseits die topologischen Filter und andererseits die saturierten multiplikativen Systeme sich als Spezialfälle ergeben.

AUFGABE 16.9. Sei  $R$  ein kommutativer Ring und sei  $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_n)$  ein endlich erzeugtes Ideal. Es sei  $f \in R$  ein weiteres Element. Dann nennt man die  $R$ -Algebra

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die *erzwingende Algebra* zu den  $f_1, \dots, f_n, f$ . Zeige, dass  $A$  folgende Eigenschaft erfüllt: zu jedem Ringhomomorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  in einen kommutativen Ring  $S$  mit der Eigenschaft  $\varphi(f) \in \mathfrak{a}S$  gibt es einen  $R$ -Algebra Homomorphismus  $\vartheta : A \rightarrow S$ . Zeige ebenso, dass dieser Homomorphismus *nicht* eindeutig bestimmt ist.

AUFGABE 16.10. Sei  $R$  eine kommutative  $K$ -Algebra von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Es seien  $f_1, \dots, f_n, f$  Elemente in  $R$  und es sei

$$A = R[T_1, \dots, T_n]/(f_1T_1 + \dots + f_nT_n + f)$$

die erzwingende Algebra zu diesen Daten. Charakterisiere die Fasern des zugehörigen Morphismus

$$K\text{-Spek}(A) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$$

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 16.11. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien  $R$  und  $S$  integrale  $K$ -Algebren von endlichem Typ. Es sei  $\varphi : R \rightarrow S$  ein  $K$ -Algebra Homomorphismus mit zugehörigem Morphismus  $\varphi^* : K\text{-Spek}(S) \rightarrow K\text{-Spek}(R)$ . Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1)  $\varphi$  ist injektiv.
- (2) Das Bild von  $\varphi^*$  ist dicht in  $K\text{-Spek}(R)$ .
- (3)  $\varphi$  induziert einen Ringhomomorphismus  $Q(R) \rightarrow Q(S)$ .

AUFGABE 16.12. (4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien  $R$  und  $S$  zwei integrale  $K$ -Algebren von endlichem Typ. Es sei ein  $K$ -Algebra Homomorphismus

$$\varphi : Q(R) \rightarrow Q(S)$$

zwischen den Quotientenkörpern gegeben. Zeige, dass es eine offene Teilmenge  $U \subseteq K\text{-Spek}(S)$  und einen Morphismus

$$U \longrightarrow K\text{-Spek}(R)$$

gibt, der  $\varphi$  induziert.

**AUFGABE 16.13.** (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affin-algebraischen Kurven  $C_1$  und  $C_2$  über  $\mathbb{C}$  und einem Morphismus

$$\psi : C_1 \longrightarrow C_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig in der metrischen Topologie ist.

**AUFGABE 16.14.** (8 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei affinen Varietäten  $V_1$  und  $V_2$  und einem Morphismus

$$\psi : V_1 \longrightarrow V_2,$$

der bijektiv ist, wo aber die Umkehrabbildung nicht stetig (in der Zariski-Topologie) ist.

(und daher auch kein Morphismus)

**AUFGABE 16.15.** (3 Punkte)

Sei  $U \subseteq K\text{-Spek}(R)$  eine quasiaffine Varietät und sei  $f \in \Gamma(U, \mathcal{O})$  eine algebraische Funktion. Es seien  $q = g_i/h_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , lokale Darstellungen von  $f$  auf  $D(h_i) \subseteq U$ . Zeige, dass das Urbild  $f^{-1}(0)$  gleich der abgeschlossenen Menge  $V(h_1g_1, \dots, h_n g_n) \cap U$  ist.