Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 6

Zwei Kinder, die noch nicht zählen können, sitzen im Sandkasten und wollen wissen, wer von ihnen mehr Buddelsachen dabei hat. Sie lösen das Problem, indem beide gleichzeitig je eine Sache aus ihrem Besitz aus dem Sandkasten hinauswerfen, und dies so lange wiederholen, bis ein Kind keine Sachen mehr im Sandkasten hat. Wenn das andere Kind noch Sachen übrig hat, so hat dieses insgesamt mehr Buddelsachen, anderfalls haben sie gleichviel. Dies ist die Grundidee für den Begriff der gleichmächtigen Menge, den wir vor allem für endliche Mengen studieren werden.

Definition 6.1. Zwei Mengen L und M heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

gibt.

Endliche Mengen

Wir wenden uns nun endlichen Mengen zu. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\{1, \ldots, m\} = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \text{ und } k \leq m\}.$$

Die kleiner/gleich Relation ist dabei durch $k \leq m$ genau dann, wenn es ein $x \in \mathbb{N}$ gibt mit $k + x = m$, definiert. Die Addition wurde dabei induktiv ausgehend von den Peano-Axiomen für natürliche Zahlen definiert. Diese Operationen verwenden wir im Folgenden, wobei es für das Verständnis unerheblich ist, ob man sie sich naiv vorstellt oder aber axiomatisch eingeführt denkt. Unser Anzahlbegriff wird aber streng unter Bezug auf die Existenz von bijektiven Abbildungen eingeführt.

Definition 6.2. Eine Menge M heißt *endlich* mit m Elementen, wenn es eine Bijektion

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

gibt.

Die natürliche Zahl m ist dabei eindeutig bestimmt (Aufgabe 6.6) und heißt die *Anzahl* (oder die *Kardinalität*) der Menge. Sie wird mit $\#(M)$ oder mit $|M|$ bezeichnet. Die bijektive Abbildung

$$\{1, \ldots, m\} \longrightarrow M$$

kann man eine *Nummerierung* der Menge M nennen. Eine Menge besitzt also n Elemente, wenn man sie mit den natürlichen Zahlen von 1 bis n durchnummerieren kann. Zwei endliche Mengen M und N, für die es eine Bijektion

$$M \longrightarrow N$$

gibt, besitzen die gleiche Anzahl. Dies beruht einfach darauf, dass diese Bijektion verknüpft mit der bijektiven Nummerierung wieder eine Bijektion ist. Eine Menge, die nicht endlich ist, für die es also keine Bijektion mit $\{1, \ldots, n\}$ für kein n gibt, heißt *unendlich*.

LEMMA 6.3. *Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und N eine endliche Menge mit n Elementen. Es sei $m > n$. Dann gibt es keine injektive Abbildung*

$$M \longrightarrow N.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass es eine injektive Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

gibt. Es sei $T = \varphi(M) \subseteq N$ das Bild von M unter der Abbildung φ. Dann ergibt sich eine Bijektion

$$\tilde{\varphi} : M \longrightarrow T,$$

da sich die Injektivität überträgt und da eine Abbildung immer surjektiv auf ihr Bild ist. Daher haben M und T gleich viele Elemente. Nach Aufgabe 6.8 ist die Anzahl einer Teilmenge stets kleiner oder gleich der Anzahl der Menge. Also ist $m \leq n$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Die vorstehende Aussage heißt *Schubfachprinzip* (oder *Taubenschlagprinzip*). Es besagt, dass wenn man m Tauben auf n Plätze verteilt mit $m > n$, dass dann in mindestens einem Platz mindestens zwei Tauben landen.

LEMMA 6.4. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F : M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

Beweis. Wir führen Induktion über die Anzahl n der beiden Mengen M und N. Bei $n = 0$ gibt es nur die leere Abbildung (von der leeren Menge in die leere Menge), und diese erfüllt alle drei Eigenschaften. Sei nun $n \geq 1$

und die Aussage für alle Mengen M mit einer Anzahl $< n$ bewiesen. Es muss lediglich die Äquivalenz von injektiv und surjektiv gezeigt werden. Sei zunächst F injektiv. Wir wählen ein Element $x \in M$ und setzen $y = F(x)$. Wir setzen

$$M' = M \setminus \{x\} \text{ und } N' = N \setminus \{y\}\,.$$

Beide Mengen haben $n-1$ Elemente, und somit kann man darauf die Induktionsvoraussetzung anwenden. Es sei

$$F' : M' \longrightarrow N',\, x \longmapsto F(x).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da wegen der Injektivität nur das Element x auf y abgebildet wird, alle anderen Elemente aus M' werden auf andere Elemente abgebildet, d.h. sie landen in N'. Die Injektivität von F überträgt sich auf die Teilmenge M'. Nach der Induktionsvoraussetzung ist also F' surjektiv. Damit ist aber insgesamt F surjektiv, da einerseits y im Bild liegt (mit x als Urbild) und da andererseits jedes Element $z \neq y$ zu N' gehört und damit ein Urbild in M' besitzt.

Sei nun F surjektiv. Sei $x \in M$ beliebig und $y = F(x)$. Wir betrachten die Einschränkung

$$M' =: M \setminus \{x\} \longrightarrow N.$$

Diese Abbildung kann nicht surjektiv sein. Andernfalls würde sich nämlich der Widerspruch (hier geht auch Aufgabe ein)

$$n = \#(M) > \#(M \setminus \{x\}) \geq \#(F(M \setminus \{x\})) = \#(N) = n$$

ergeben. Daher muss y im Bild fehlen, und das heißt, dass eine surjektive Abbildung

$$M \setminus \{x\} \longrightarrow N \setminus \{y\}$$

vorliegt. Beide Mengen besitzen $n-1$ Elemente, so dass nach der Induktionsvoraussetzung hier eine Bijektion vorliegt. Damit ist auch die ursprüngliche Abbildung eine Bijektion. $\square$

Lemma 6.5. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge ist der Binomialkoeffizient*

$$\binom{n}{k}.$$

Insbesondere sind die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Die Aussage ist für $n = 0$ klar, sei also angenommen, die Aussage sei für ein beliebiges n (für alle k) schon bewiesen, und betrachten wir eine $(n+1)$-elementige Menge M. Diese Menge ist wegen $n \geq 0$ nicht leer. Wir fixieren ein Element $a \in M$ und betrachten die n-elementige Teilmenge $M \setminus \{a\} \subset M$. Jede Teilmenge von M enthält entweder a oder nicht. Daher lassen sich die k-elementigen Teilmengen von M aufteilen in k-elementige Teilmengen von $M \setminus \{a\}$ (das sind diejenigen Teilmengen, die nicht a enthalten), und die $(k-1)$-elementigen

Teilmengen von $M \setminus \{a\}$ (eine solche $(k-1)$-elementige Teilmenge T definiert die k-elementige Teilmenge $T \cup \{a\}$ in M). Daher ist die Gesamtzahl der k-elementigen Teilmengen von M nach Lemma 5.11 gleich

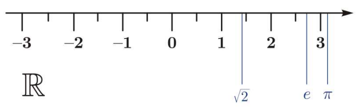
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

$\square$

Die reellen Zahlen

Wir besprechen hier verschiedene mögliche Zugänge zu den reellen Zahlen, nämlich den geometrischen Zugang, den Zugang über Ziffernfolgen und den axiomatischen Zugang. In der höheren Mathematik ist der axiomatische Zugang das Maß der Dinge, so dass hier insbesondere ein Bewußtsein für die Schwächen der zuerst genannten Zugänge geschaffen werden soll.

Der geometrische Zugang: reelle Zahlen als Punkte einer markierten Geraden

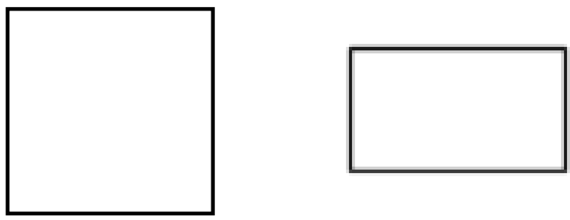


In diesem Zugang werden die reellen Zahlen als Punkte einer unendlichen „markierten“ Geraden aufgefasst. Dem liegt die Auffassung zugrunde, dass mit den reellen Zahlen alle möglichen Längen ausgedrückt werden sollen, dass Zahlen zum Messen da sind, und mögliche Messwerte repräsentieren. Wenn man sich auf „wirkliche Messwerte“ beschränken möchte, sollte man eher mit einer Halbgeraden als mit einer ganzen Geraden arbeiten, doch das ist im Folgenden kein wesentlicher Unterschied. Dass Punkte auf der Geraden Messwerte repräsentieren können, setzt voraus, dass ein Punkt auf der Geraden als Ursprungspunkt oder Nullpunkt 0 ausgezeichnet wird, so dass dann ein beliebiger Punkt über seinen Abstand zum Nullpunkt eine bestimmte Länge repräsentiert. Die begleitende Vorstellung dabei ist, dass man jeden irgendwo auftauchenden Abstand und jede gemessene Länge von 0 aus an die Gerade anlegen kann und dann durch den Endpunkt repräsentiert wird (in der technischen Durchführung wird eher die Gerade als Messlatte an den Gegenstand angelegt). Beispielsweise kann man eine in der Ebene über eine bestimmte Konstruktion gewonnene Länge, wie bspw. die Länge der Diagonalen in einem Quadrat, auf die Zahlengerade übertragen (bei einer „krummen Länge“ wie dem Umfang eines Kreises ist das schon schwieriger).

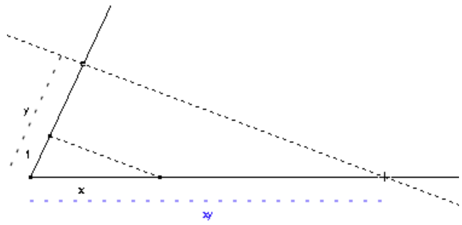
Dieser Übertrag ermöglicht es insbesondere, zwei jeweils gegebene Streckenlängen miteinander zu vergleichen und zu entscheiden, welche von ihnen größer als die andere ist. Auf der Zahlengeraden gibt es eine einfache Interpretation der

Größerrelation, die je nach der Orientierung durch „rechts von“ oder „links von“ gegeben ist. Auch die Addition besitzt eine einfache Interpretation, indem man nämlich zwei Punkte dadurch addiert, dass man die Strecke, die durch den einen Punkt repräsentiert wird (also die Strecke vom Nullpunkt zu diesem Punkt), an den anderen Punkt anlegt. Das Negative eines Punktes ist das Spiegelbild am Nullpunkt auf der gegenüberliegenden Halbgeraden. Für die Addition leuchten die Gesetzmäßigkeiten bei dieser geometrischen Beschreibung schnell ein: die Kommutativität beruht darauf, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge ich zwei Strecken aneinander lege, und die Assoziativität beruht darauf, dass es bei drei hintereinanderliegenden Strecken unerheblich ist, ob man zuerst die linke und die mittlere zu einer Zwischenstrecke zusammenfasst und dann noch die rechte hinzunimmt, oder umgekehrt.

Die Multiplikation ist auf der Zahlengeraden schon schwieriger zu erklären. Das Produkt von zwei Stecken hat als Flächeninhalt des durch die beiden Strecken definierten Rechtecks eine natürliche Interpretation; diesen Vorgang in sinnvoller Weise auf eine gerade zu zwingen ist aber nicht trivial. Man erreicht dies, indem man eine beliebige Streckenlänge als Einheitsstrecke auszeichnet und zu einem beliebigen Rechteck das flächengleiche Rechteck findet, dessen eine Seitenlänge die Einheitstrecke ist. Die andere Seitenlänge repräsentiert dann den Flächeninhalt und dadurch das Produkt. Lässt sich dieser Übergang auf der Geraden direkt durchführen?



Zunächst muss man auf der Geraden einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt als 1 auszeichnen, um eine Definition der Multiplikation zu ermöglichen. Die Gerade ist also von nun an mit zwei Punkten 0 und 1 markiert. Die Markierung der Geraden mit einer 1 (und mit Vielfachen und Teilern davon) erleichtert das Messen, da es erlaubt, die Messergebnisse auch durch Zahlen zu repräsentieren (die einfacher zu transportieren sind als die Messlatten). Der Zahlenwert eines Punktes hängt von der gewählten 1 (der Einheit) ab. Das Multiplizieren von Punkten auf der Zahlgeraden wird geometrisch über eine Ebenenkonstruktion definiert, und zwar wird eine Hilfsgerade durch den Nullpunkt gezeichnet, auf der die 1 und einer der Faktoren, sagen wir y übertragen werden. Dann verbindet man $1'$ und x durch eine Gerade und zieht dazu die parallele Gerade durch y'. Deren Schnittpunkt mit der Startgeraden ist dann $z = xy$!



Dies beruht auf dem *Strahlensatz*, die Streckenverhältnisse im Dreieck sind nämlich $\frac{y}{1} = \frac{y'}{1'} = \frac{z}{x}$, woraus $z = xy$ folgt.

Bei dieser geometrische Definition der Multiplikation ist es keineswegs sofort klar, dass sie kommutativ, assoziativ ist und dass das Distributivgesetz gilt. Für letztere müsste man zwei recht verschiedene komplizierte Konstruktionen zeichnen und mit elementar-geometrischen Mitteln nachweisen, dass sie zum gleichen Ergebnis führen.

Wir halten fest.

Vorteile der geometrischen Sichtweise: unmittelbare Anschauung, die Relation $\geq$ und die Addition haben eine unmittelbare Bedeutung, und auch der Multiplikation liegt eine überschaubare geometrische Konstruktion zugrunde.

Nachteile:

• Die Anschauung ist kein Beweismittel.

• Die Anschauung beruht auf Vorstellungen, und es ist nie wirklich klar, ob diese bei verschiedenen Menschen deckungsgleich sind.

• Multiplikation und Division erfordern den Übergang zur Ebene, und in dieser kann man letztlich nur exakt über Koordinaten argumentieren, was ein arithmetisches Verständnis der reellen Zahlen selbst voraussetzt.

• Es ist schwierig, Gesetzmäßigkeiten wie das Distributivgesetz zu begründen.

• Ein geometrischer Punkt hat eine geringe Abstraktionskraft; eine geometrische Konstruktion hängt immer stark von der genauen Ausgangskonfiguration ab, und es ist schwierig, mögliche Ausnahmefälle zu erfassen, wenn bspw. zwei konstruierte Geraden parallel werden und Ähnliches.

Reelle Zahlen als Ziffernfolgen im Dezimalsystem

Ansatz: Man fasst die reellen Zahlen auf als die Menge aller Ziffernfolgen im Dezimalsystem, wobei vor dem Komma ein Vorzeichen ($+$ oder $-$)eine endliche Folge steht und danach eine eventuell unendliche Folge. Zahlen sind dann zum Beispiel

$$-31,025, \quad +4,787878..., \quad +5,2864295662854812095532354986236 5...$$

(bei der zweiten Zahl vermutet man eine periodische Ziffernfolge, bei der dritten Zahl ist aber keine Gesetzmäßigkeit erkennbar, so dass sie nicht wirklich exakt bestimmt ist).

Die Vergleichsrelation und die Rechenoperationen werden dann durch arithmetische Manipulationen an den Ziffernfolgen erklärt, nämlich so, wie man eben schriftlich addiert, multipliziert, dividiert.

Vorteile:

• Die einzelnen Zahlen haben stets eine konkrete Benennung.

• Es ist einfach, ein Gefühl für die Nachbarschaft von Zahlen und ihre Größenverhältnisse zu entwickeln.

• Man kann einfach (zumindest approximative) Ergebnisse für die Rechenoperationen ausrechnen.

Nachteile:

• Man hat zunächst ein grundsätzliches Uneindeutigkeitsproblem, die Ziffernfolge $1 = 1,00000...$ und die Ziffernfolge $0,9999...$ sind als Ziffernfolgen verschieden, sie sollten aber doch die gleiche reelle Zahl bezeichnen, da ihre Differenz null ist.

• Die Rechenregeln sind wieder schwierig nachzuweisen.

• Es ist unklar, was „alle“ Ziffernfolgen sein sollen: sind es nur die beschreibbaren, für die es also eine (beliebig komplizierte) Vorschrift gibt, wie die Ziffern aussehen, oder sind es überhaupt alle?

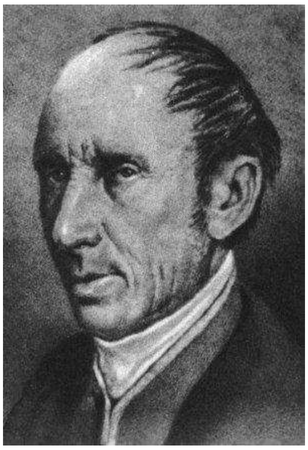
• Inwiefern muss man die Ziffernfolgen von Zahlen wie $\sqrt{2}, \pi, e$ kennen, um sie als Zahlen anzuerkennen. Ist $\sqrt{2}$ erst dann eine reelle Zahl, wenn man einen Algorithmus angeben kann, der die zugehörige Ziffernfolge beschreiben kann?

• Wie ist bei unterschiedlichen Ziffersystemen der Übergang definiert?

• Eine konkret gegebene Zahl ist eine Ziffernfolge und besitzt somit eine unendliche Bezeichnung, damit kann man kaum ökonomisch arbeiten.

Der axiomatische Zugang

Bernard Bolzano
(1781 - 1848)



Augustin Louis Cauchy
(1789-1857)

Richard Dedekind
(1831-1916)

Im axiomatischen Zugang werden die Gesetzmäßigkeiten, die die Gesamtheit der reellen Zahlen erfüllen sollen, in den Mittelpunkt gestellt. Wichtig ist weniger die Repräsentierung einer einzelnen reellen Zahl, als vielmehr die Eigenschaften der Gesamtmenge. Als Eigenschaften wählt man dabei vor allem solche Eigenschaften, die einerseits einfach zu formulieren sind und andererseits starke Folgerungen erlauben. Diese Eigenschaften nennt man *Axiome* (es gibt grundsätzlich zwei Arten von Axiomensystemen, die sich nicht logisch oder ontologisch unterscheiden, wohl aber von der Motivation her; es gibt nämlich, wie im Beispiel der reellen Zahlen, solche Axiomensysteme, die ein präaxiomatisch gegebenes mathematisches Objekt axiomatisieren wollen, und solche, die das nicht wollen. Im ersten Fall kann es ein gewisses Spannungsverhältnis zwischen den Axiomen und den intendierten Vorstellungen geben, im zweiten Fall nicht, im ersten Fall können Axiome richtig oder falsch sein, im zweiten Fall nicht. Aus Bequemlichkeit stellt sich die Mathematik meist einfach auf den zweiten Standpunkt, d.h. sie sagt, es ist uns egal, ob unser Axiomensystem der reellen Zahlen etwas mit deiner Vorstellung von reellen Zahlen zu tun hat).

Vorteile:

• Die reellen Zahlen werden dadurch auf eine mengentheoretisch-logische Grundlage gestellt, man muss sich nicht auf die Anschauung stützen.

• Sie werden durch einige wenige Gesetzmäßigkeiten, die für sie typisch sind, charakterisiert.

• Man weiß jederzeit, welche Argumentation, um eine Eigenschaft nachzuweisen, erlaubt ist und welche nicht, erlaubt ist nämlich nur das logische Erschließen der Eigenschaft aus den Axiomen heraus.

• Viele Aussagen, die man aus Axiomen ableiten kann, benötigen gar nicht das volle Axiomensystem, sondern nur Teile davon. Man kann daher die Axiome gruppieren, und wenn man aus einer bestimmten Axiomengruppe eine Aussage ableiten kann, so gilt diese auch für alle mathematischen Gebilde, die diese Axiomengruppe erfüllen.

• Die Vorteile der anderen Zugänge bleiben auf der Modellebene erhalten. Bspw. ist es dann ein Satz, dass jede reelle Zahl sich in eine Ziffernfolge entwickeln lässt.

Nachteile:

• Man braucht einen Existenznachweis, dass es eine solche Menge mit den intendierten Eigenschaften wirklich gibt und dass sie „im Wesentlichen“ eindeutig ist.

• Man muss eine Zielvorstellung haben, welche Eigenschaften gelten und ableitbar sein sollen und welche nicht, d.h. man braucht schon eine gewisse Vorstellung von den reellen Zahlen. Es gibt nie eine letzte Sicherheit, ob das axiomatisch fixierte Gebilde dasjenige ist, das wir intendiert haben (zugleich wird bei der Axiomatisierung deutlich, dass unsere Vorstellung weit weniger exakt sind, als zunächst gedacht). Die Vorstellung von anschaulicher Kontinuität und einer axiomatischen Fassung dafür sind grundsätzlich nicht deckungsgleich.

Alles in allem herrscht im Umgang mit den reellen Zahlen der zweite Gesichtspunkt vor, ohne dass genau festgelegt würde, welche Ziffernfolgen erlaubt sind und welche nicht. Dies reicht auch für viele praktische Zwecke aus, wo man Zahlen im Allgemeinen nur hinreichend gut approximieren muss. Der Standpunkt der Mathematik ist aber der axiomatische Zugang, und zwar nicht nur hinsichtlich der reellen Zahlen, sondern hinsichtlich mathematischer Objekte überhaupt. In der Mathematik interessiert man sich also für Axiome und was man aus ihnen beweisen kann. Dadurch kann die gesamte Mathematik auf eine sehr übersichtliche und überzeugende Menge von logischen und mengentheoretischen Prinzipien gestellt werden. Die axiomatische Methode geht auf Euklid zurück und etablierte sich erneut im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts, an dessen Ende auch die Mengenlehre von Georg Cantor eingeführt wurde (die selbst nicht ohne Probleme war). Die Entwicklung der Axiomatik für die reellen Zahlen war ein schwieriger Prozess, insbesondere war und ist es nicht trivial, eine exakte Formulierung für die Eigenschaft zu finden, die man intuitiv mit „kontinuierlich“ oder „lückenfrei“ fasst, Die Antwort, was eine reelle Zahl ist, wie sie seit dem neunzehnten Jahrhundert gegeben wird, ist auch auf den ersten Blick keineswegs erhellend:

> Eine reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen von rationalen Zahlen.

Wenn man den zähen geschichtlichen Prozess betrachtet, der zu diesem letztlich überzeugenden Begriff geführt hat, so überrascht es nicht, wenn Studienanfänger mit diesem Begriff Schwierigkeiten haben. Da hilft aber alles nichts, an diese Abstraktion muss man sich gewöhnen.

Abbildungsverzeichnis