Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 5

Für zwei natürliche Zahlen n, m gilt $n \geq m$ genau dann, wenn man $n = m+k$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ schreiben kann (siehe Aufgabe 4.12). In diesem Fall ist das k aufgrund der Abziehregel eindeutig bestimmt und heißt die *Differenz* von n und m, geschrieben $k = n - m$. Bei $n < m$ gibt es innerhalb von $\mathbb{N}$ keine Lösung für die Gleichung $n = m + x$. Innerhalb der ganzen Zahlen gibt es die negative Lösung $x = n - m$.

Die ganzen Zahlen

Wir wollen die ganzen Zahlen ausgehend von den natürlichen Zahlen konstruieren. Für viele Konstruktionen in der Mathematik ist der Begriff der Äquivalenzrelation entscheidend. Die Strategie ist dabei, zuerst eine „ziemlich große" Menge zu konstruieren, die alle Elemente der beabsichtigten Menge (in aller Regel mehrfach) „repräsentiert", und dann Elemente zu „identifizieren", damit jedes Zielobjekt einen eindeutigen Repräsentanten bekommt.

Definition 5.1. Es seien $(M_1, \star_1)$ und $(M_2, \star_2)$ zwei Mengen, auf denen jeweils eine Verknüpfung festgelegt ist. Dann heißt die auf der Produktmenge

$$M_1 \times M_2$$

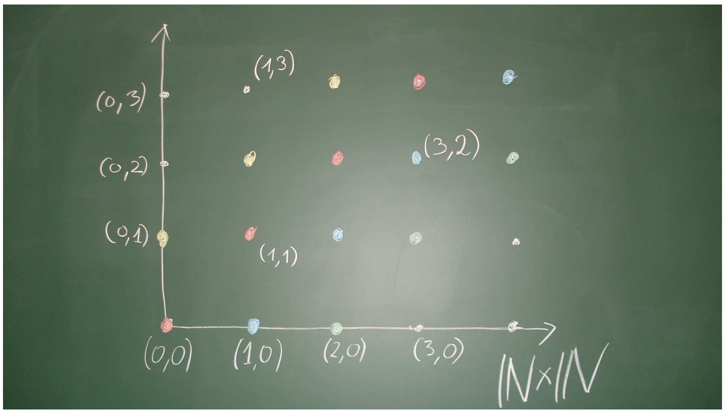
durch

$$(x_1, x_2) \star (y_1, y_2) := (x_1 \star_1 y_1, x_2 \star_2 y_2)$$

definierte Verknüpfung die *Produktverknüpfung* (oder *komponentenweise Verknüpfung*).

Dies ist ein einfacher Begriff, bspw. wird auf dem $\mathbb{R}^n$ die Vektorraumaddition komponentenweise erklärt. Eigenschaften der Einzelverknüpfungen übertragen sich direkt auf die Produktverknüpfung. Wenn bspw. beide Verknüpfungen assoziativ sind, so gilt das auch für die Produktverknüpfung. Wir verwenden den Begriff in der folgenden Konstruktion.

Beispiel 5.2. Es sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Produktmenge mit der komponentenweisen Addition.[1] Wir erklären auf M eine Relation durch[2]



$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } a+d = b+c\,.$$

Dies ist bei $a \leq c$ genau dann der Fall, wenn es ein $e \in \mathbb{N}$ (nämlich $e = c-a$) gibt mit

$$(c,d) = (a,b) + (e,e)\,.$$

D.h. die beiden Paare unterscheiden sich um ein Diagonalelement, also um ein Paar, wo beide Komponenten übereinstimmen. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf M, siehe Aufgabe 5.1. Wenn man $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als ein quadratisches Gitter anordnet (das ist ein „diskretes Koordinatensystem“), so sind die Äquivalenzklassen gegeben durch die Punkte auf einer zur Diagonalen parallelen „diskreten Geraden“. Die Punkte (a,b) mit $a \geq b$ sind äquivalent zu $(a-b,0)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die zweite Komponente 0 ist. Die Punkte (a,b) mit $a \leq b$ sind äquivalent zu $(0,b-a)$, sie haben also einen Repräsentanten, bei dem die erste Komponente 0 ist. Die Punkte (a,a) sind zu $(0,0)$ äquivalent. Den Repräsentanten einer Äquivalenzklasse, bei dem mindestens eine Komponente null ist, nennen wir den *Standardvertreter* dieser Äquivalenzklasse. Die Standardvertreter sind die diskreten Punkte des begrenzenden Viertelkreuzes; zu einem Punkt ergibt sich der Standardvertreter, wenn man parallel zur Diagonalen in Richtung der Halbachsen wandert bis man auf einer der Halbachsen landet. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie den gleichen Standardvertreter besitzen.

[1] Passende Interpretationen für die Paare in diesem Kontext sind bspw.: Das Paar (a,b) repräsentiert das Ergebnis eines Fußballspieles, wobei a die Toranzahl der Heimmannschaft und b die Toranzahl der Gastmannschaft repräsentiert, oder: Das Paar (a,b) repräsentiert das Alter eines menschlichen Paares, wobei a für das Alter der Frau und b für das Alter des Mannes steht. Der Übergang zu den Äquivalenzklassen bedeutet dann, sich nur noch für die Tordifferenz bzw. den Altersunterschied zu interessieren, nicht mehr für das genaue Ergebnis bzw. das Alter der einzelnen Personen. Man kann auch das Paar als eine Schrittfolge aus a Schritten nach rechts und b Schritten nach links ansehen.

[2] Das Paar (a,b) wird später die Differenz $a-b$ repräsentieren.

Wir bezeichnen nun die Quotientenmenge, also die Menge der Äquivalenzklassen unter dieser Äquivalenzrelation, als *Menge der ganzen Zahlen* und bezeichnen sie mit $\mathbb{Z}$. Jede ganze Zahl hat dann genau einen Standardvertreter der Form $n := (n, 0)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$, der Form $0 := (0, 0)$ oder der Form $-n := (0, n)$ mit $n \in \mathbb{N}_+$. Eine natürliche Zahl n fassen wir von nun an als die ganze Zahl $(n, 0)$ auf.

Wir wollen nun zwei ganze Zahlen, also zwei solche Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ und $[(c, d)]$ miteinander „addieren", also eine Verknüpfung $\oplus$ auf $\mathbb{Z}$ einzuführen. Der naheliegende Ansatz ist, diese Verknüpfung mittels der komponentenweisen Addition als

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$$

zu definieren. Hier tritt das Problem der *Wohldefiniertheit* auf, denn die Verknüpfung wird erklärt unter Bezug auf Repräsentanten, und es ist nicht von vornherein klar, dass unterschiedliche Repräsentanten zum gleichen Ergebnis führen. Wenn also $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$ sind, so muss man überprüfen, dass

$$(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$$

und damit $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$ ist. Dies ist der Fall, siehe Aufgabe 5.2. Man kann weiterhin zeigen, dass die so definierte Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ assoziativ und kommutativ ist, dass $[(0, 0)]$ das neutrale Element der Verknüpfung ist und dass es zu jedem Element $[(a, b)]$ ein inverses Element gibt, nämlich $[(b, a)]$.

Wir definieren nun eine Multiplikation auf $\mathbb{Z}$ durch

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)] .$$

Dies ist wieder wohldefiniert und man kann zeigen, dass die Multiplikation assoziativ und kommutativ ist mit $1 = [(1, 0)]$ als neutralem Element und dass das Distributivgesetz gilt.

Um die Eigenschaften der Verknüpfungen, die wir auf den ganzen Zahlen haben, prägnant beschreiben zu können, dient der Begriff des kommutativen Ringes.

Definition 5.3. Ein *kommutativer Ring* R ist eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ (genannt *Addition* und *Multiplikation*) und mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 derart, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $(R, +, 0)$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Die Multiplikation ist eine assoziative und kommutative Verknüpfung und 1 ist das neutrale Element der Multiplikation.
(3) Es gilt das *Distributivgesetz*, also

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

für alle $a, b, c \in R$.

Lemma 5.4. *Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen kommutativen Ring.*

Beweis. Siehe Aufgabe 5.14. $\square$

Von nun an stellen wir uns $\mathbb{Z}$ als eine beidseitige diskrete Zahlengerade vor.

Körper

Wir werden von nun an den axiomatischen Aufbau der reellen Zahlen besprechen. Diese Axiome gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Ein Körper ist ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$, bei dem zusätzlich jedes Element $x \neq 0$ ein Inverses bzgl. der Multiplikation bestizt. In der folgenden Definition werden alle Eigenschaften eines Körpers aufgeführt.

Definition 5.5. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
  - (c) 0 ist das neutrale Element, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
  - (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

(2) Axiome der Multiplikation
  - (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  - (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
  - (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
  - (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen und die reellen Zahlen.

Die additiven Körperaxiome kann man so lesen, dass die Menge K zusammen mit dem ausgezeichneten Element 0 und der Addition $+$ als Verknüpfung eine Gruppe bildet, die zusätzlich kommutativ ist. Ebenso bildet die Menge $K \setminus \{0\}$ (also ganz K ohne die 0) mit dem neutralen Element 1 (das wegen der expliziten Voraussetzung der Körperaxiome von 0 verschieden ist und daher zu $K \setminus \{0\}$ gehört) und der Multiplikation $\cdot$ eine (ebenfalls kommutative) Gruppe. Wenn ein Körper K vorliegt, so hat man also zugleich zwei Gruppen vorliegen, es ist aber falsch zu sagen, dass K auf zweifache Weise eine Gruppe ist, da einerseits K mit der Addition und andererseits $K \setminus \{0\}$ (und eben nicht K) eine Gruppe mit der Multiplikation bildet.

Lemma 5.6. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Dies folgt aus der allgemeinen Eindeutigkeitsaussage für inverse Elemente in jeder Gruppe, siehe die letzte Vorlesung. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element b mit $a + b = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element c mit $ac = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

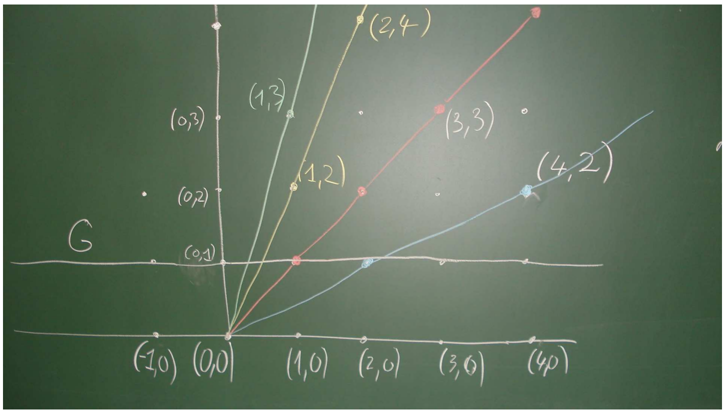
Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1} .$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

In jedem Körper findet man die natürlichen Zahlen und auch die ganzen Zahlen wieder, und zwar wird die natürliche Zahl n als die n-fache Summe von 1_K mit sich selbst in K interpretiert. Entsprechend wird die negative Zahl $-n$ als die n-fache Summe von -1_K interpretiert, siehe die Aufgaben. Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Beispiel 5.7. Wir wollen ausgehend von der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die einen kommutativen Ring bildet, die Menge der rationalen Zahlen konstruieren. Wir gehen dabei wieder ähnlich wie bei der Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen vor, indem wir auf einer „zu großen“ Menge eine Äquivalenzrelation einführen, so dass die Quotientenmenge ein Modell für die rationalen Zahlen sind.



Wir starten mit der Produktmenge

$$P = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ = \{(a, b) :\ a \in \mathbb{Z} \text{ und } b \in \mathbb{N}_+\}\,.$$

Zur Orientierung sei schon jetzt gesagt, dass das Paar (a, b) später den Bruch a/b repräsentieren soll.[3] Auf P wollen wir eine Äquivalenzrelation definieren, wobei zwei Paare als äquivalent gelten sollen, wenn sie „den gleichen Bruch“ repräsentieren (den es noch nicht gibt). Wir definieren

$$(a, b) \sim (c, d),\ \text{falls } ad = bc \text{ ist}\,.$$

Diese Relation wird also unter Bezug auf die Gleichheit in $\mathbb{Z}$ erklärt. Es handelt sich dabei um eine Äquivalenzrelation, wie man direkt nachrechnen kann, siehe Aufgabe 5.7. Die Quotientenmenge unter dieser Äquivalenzrelation nennen wir $\mathbb{Q}$. Für die Elemente in $\mathbb{Q}$ schreiben wir vorläufig noch $[(a, b)]$.

Es ist hilfreich, sich diese Situation zu veranschaulichen, indem man die diskrete obere Halbebene[4]

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+ \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ betrachtet. Ein Paar (a, b) ist dann ein Gitterpunkt, wobei wir uns die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als die Punkte

$$(n, 1),\ n \in \mathbb{Z}\,,$$

vorstellen. Die zugehörige durchgezogene „Zahlengerade“ (wo also die zweite Komponente konstant 1 ist) bezeichnen wir mit G. Ein jeder Punkt $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_+$ definiert eine eindeutige Gerade, die durch diesen Punkt und durch den Nullpunkt $(0, 0)$ verläuft. In dieser geometrischen Interpretation sind zwei Punkte (a, b) und (c, d) genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Gerade definieren, und dies ist genau dann der Fall, wenn ihre „Steigungen“ übereinstimmen. Zwei Punkte liegen ja auf der gleichen Geraden genau dann, wenn sie, wenn man durch Streckung ihre zweite Koordinate zur Übereinstimmung bringt, dann auch die erste Koordinate übereinstimmt. Wenn man den ersten Punkt mit d streckt (multipliziert) und den zweiten Punkt mit

[3] Man kann sich vorstellen, dass in (a, b) die erste Zahl eine Anzahl an Kuchen und die zweite Zahl eine Anzahl von Personen bedeutet.

[4] Man könnte auch $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ nehmen.

b, so erhält man die beiden Punkte (da, db) und (bc, bd), und die Gleichheit vorne war die Definition für die Relation.

Auch die Identifizierungsabbildung zu dieser Äquivalenzrelation kann man sich gut vorstellen. Der Schnittpunkt der durch einen Punkt (a, b) definierten Geraden H mit der Zahlengeraden G ist ein Punkt, der dem Bruch a/b entspricht.

Wir wollen nun auf $\mathbb{Q}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren. Wir setzen[5]

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)] \text{ und } [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]\,.$$

Man muss jetzt zeigen, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind, also unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, siehe Aufgabe 5.16. Sodann kann man mit einigem Aufwand nachweisen, dass $\mathbb{Q}$ mit diesen Verknüpfungen und mit den ausgezeichneten Elementen

$$0 := [(0, 1)] \text{ und } 1 := [(1, 1)]$$

einen Körper bilden, siehe Aufgabe 5.17. Das Negative eines Elementes $[(a, b)]$ ist $[(-a, b)]$ und das Inverse eines von null verschiedenen Elementes $[(a, b)]$ ist $[(b, a)]$ (bzw. $[(-b, -a)]$, falls a negativ ist).

Aufgrund von dieser Konstruktion können wir uns die rationalen Zahlen als Punkte auf einer Zahlgeraden vorstellen (in der Konstruktion die Geraden mit $y = 1$)

Beispiel 5.8. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element der Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bzgl. der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

und

*	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Lemma 5.9. *Es sei K ein Körper und seien a, b, c, a_i, b_k Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen*

[5] Die Definition der Addition kann man als Addition der Steigung sehen.

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*),*
(2) $a(-b) = -ab = (-a)b$
(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*),*
(4) $a(b - c) = ab - ac,$
(5) $(\sum_{i=1}^{r} a_i)(\sum_{k=1}^{s} b_k) = \sum_{1 \leq i \leq r,\, 1 \leq k \leq s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*
(6) *Aus* $a \cdot b = 0$ *folgt* $a = 0$ *oder* $b = 0$*.*

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)
$$(-a)b + ab = (-a + a)b = 0b = 0$$
nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab.

(3) Nach (2) ist $(-a)(-b) = (-(-a))b$ und wegen $-(-a) = a$ (dies gilt in jeder Gruppe) folgt die Behauptung.

(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.

(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 7.11.

(6) Wenn a und b von null verschieden sind, so gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1}. Wenn $ab = 0$ wäre, so ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $b^{-1}a^{-1}$ die Gleichung $1 = 0$ (wegen Teil (1)), was aber in einem Körper nicht sein kann.

□

Die Binomialkoeffizienten

Definition 5.10. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$.[6] Dann nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

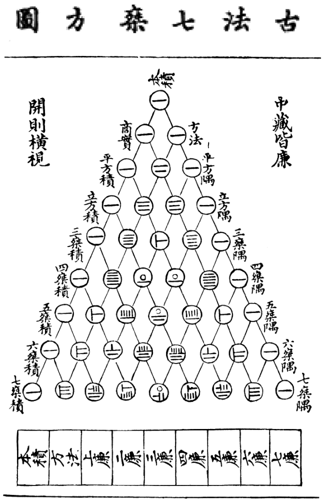
den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

Von dieser Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich dabei um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

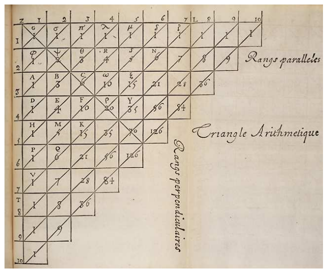
[6] Bei $k > n$ setzen wir die Binomialkoeffizienten gleich 0.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das Dreieck der Binomialkoeffizienten war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es Yanghui-Dreieck (nach Yang Hui (um 1238-1298)),



in Europa heißt es das Pascalsche Dreieck (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

LEMMA 5.11. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Bedingung*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 5.9. □

Die folgende Formel bringt die Addition und die Multiplikation miteinander in Beziehung.

SATZ 5.12. *(Binomi) Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

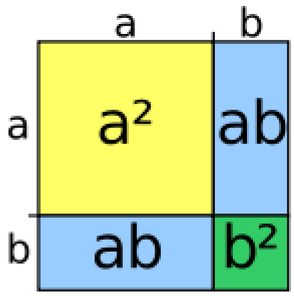
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

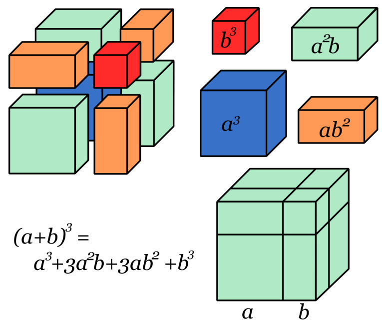
Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Bei $n = 1$ hat man einerseits $(a+b)^1 = a+b$

und andererseits $a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \\
&= a(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}) + b(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k})a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

$\square$





Abbildungsverzeichnis