Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Man beschreibe zu einer kommutativen K-Algebra R von endlichem Typ die Spektrumsabbildung, die zum Strukturhomomorphismus der Algebra gehört.

Aufgabe 12.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass die Punkte aus $K-$ Spek (R) den maximalen Idealen in R entsprechen.

Aufgabe 12.3. Sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ. Zeige, dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ in $K - \operatorname{Spek}(R)$ die Gleichheit

$$V(\mathfrak{a}) = V(\operatorname{rad}(\mathfrak{a}))$$

gilt.

Aufgabe 12.4. Zeige, dass die Zariski-Topologie auf dem K-Spektrum einer endlich erzeugten kommutativen K-Algebra R wirklich eine Topologie ist.

Aufgabe 12.5. Seien R, S, T drei kommutative K-Algebren von endlichem Typ und $\varphi : R \to S$ und $\psi : S \to T$ seien K-Algebra-Homomorphismen. Man zeige, dass für die zugehörigen Spektrumsabbildungen

$$(\psi \circ \varphi)^* = (\varphi^*) \circ (\psi^*)$$

gilt. Ferner zeige man, dass zur Identität $\operatorname{id}\colon R \to R$ auch id^* die Identität ist.

Aufgabe 12.6. Man gebe ein Beispiel von zwei kommutativen K-Algebren R, S von endlichem Typ und einer stetigen Abbildung zwischen den zugehörigen K-Spektren, die nicht von einem K-Algebra-Homomorphismus herrühren kann.

Aufgabe 12.7. Sei K ein Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabildung. Zeige, dass

$$(\varphi^*)^{-1}(0) = V(F)$$

ist.

Aufgabe 12.8. Sei K ein Körper und sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ mit der Reduktion $S = R_{\text{red}}$. Zeige, dass es eine natürliche Homöomorphie

$$K - \operatorname{Spek}(R) \cong K - \operatorname{Spek}(S)$$

gibt.

Aufgabe 12.9.*

Sei K ein Körper und $R = K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte K-Algebra. Stifte eine Bijektion zwischen

$$K-\operatorname{Spek}(R) \text{ und } V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n .$$

Aufgabe 12.10.*

Sei K ein Körper, R eine endlich erzeugte K-Algebra, sei $\mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal und sei $X = K-\operatorname{Spek}(R)$. In welcher Beziehung stehen die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = \emptyset \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist das Einheitsideal}$$

und die beiden Aussagen

$$V(\mathfrak{a}) = X \text{ und } \mathfrak{a} \text{ ist nilpotent}$$

zueinander. Zeige, dass die Antwort davon abhängt, ob K algebraisch abgeschlossen ist oder nicht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (3 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ, und sei $F \in R$. Es sei

$$\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

die zum Einsetzungshomomorphismus gehörende Spektrumsabildung. Zeige, dass F konstant ist genau dann, wenn φ^* konstant ist.

Man mache sich dabei auch die unterschiedlichen Bedeutungen von „konstant“ klar.

Aufgabe 12.12. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel von zwei integren K-Algebren von endlichem Typ R und S und einem K-Algebra-Homomorphismus $\varphi : R \to S$, der kein Ringisomorphismus ist, wo aber die induzierte Spektrumsabbildung $\varphi^* : K - \operatorname{Spek}(S) \longrightarrow K - \operatorname{Spek}(R)$ ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien R und S integre K-Algebren von endlichem Typ. Es sei $\varphi \colon R \to S$ ein endlicher injektiver K-Algebra-Homomorphismus. Zeige, dass dann $\varphi^* \colon K\text{–}\operatorname{Spek}(S) \to K\text{–}\operatorname{Spek}(R)$ surjektiv ist.

Aufgabe 12.14. (6 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik null. Es sei eine polynomiale Abbildung der Form

$$\varphi : \mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\ t \longmapsto (t^2, \psi(t))\,,$$

gegeben (mit $\psi(t) \in K[t]$) Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn ψ die Form hat

$$\psi(t) = at^n + \theta(t)$$

mit $a \neq 0$, n ungerade und $\theta(t)$ ein Polynom, in dem nur geradzahlige Exponenten auftreten.