

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 7

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 7.1. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte R -Algebra. Zeige $1 \in A_0$ und folgere, dass A_0 eine R -Unteralgebra von A ist.

In den meisten der folgenden Aufgaben kann man statt mit einem Grundkörper mit einem beliebigen kommutativen Grundring arbeiten.

AUFGABE 7.2. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative K -Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K -Vektorraum

$$\bigoplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von A ist.

AUFGABE 7.3. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative K -Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D \mid A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von D ist.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte K -Algebra. Ein K -Automorphismus

$$\varphi: A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

AUFGABE 7.4. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative K -Algebra. Zeige, dass der in Lemma 7.9 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi: A \longrightarrow A$$

homogen ist.

AUFGABE 7.5. Es sei D eine kommutative Gruppe und R ein kommutativer D -graduierter Ring. Es sei

$$\pi: D \longrightarrow E$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $F = \text{kern } \pi$. Zeige folgende Aussagen.

- (1) R ist in natürlicher Weise E -graduiert.
- (2) Die Operation von E^\vee auf R im Sinne von Lemma 7.9 stimmt mit der Operation via

$$\pi^\vee: E^\vee \longrightarrow D^\vee$$

überein.

- (3) Die neutrale Stufe von R bezüglich der E -Graduierung ist $\bigoplus_{d \in F} R_d$. Dieser Ring ist F -graduiert und seine neutrale Stufe stimmt mit der neutralen Stufe von R in der D -Graduierung überein.
- (4) Vergleiche die letzte Aussage mit Proposition 5.1.

AUFGABE 7.6. Beschreibe im Sinne von Aufgabe 7.5, wie auf dem Polynomring $R[X_1, \dots, X_n]$ (R ein kommutativer Ring) die feine Graduierung mit der Standardgraduierung zusammenhängt.

AUFGABE 7.7. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum. Zeige, dass es auf dem Polynomring $K[V]$ keine kanonische feine Graduierung gibt.

AUFGABE 7.8. Es sei R ein kommutativer Ring, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative R -Algebra. Es sei $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein homogenes Ideal. Zeige, dass der Restklassenring R/\mathfrak{a} ebenfalls D -graduiert ist.

AUFGABE 7.9. Wir betrachten die Gruppenoperation

$$\mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^2, (u, x, y) \longmapsto (ux, u^{-1}y).$$

Bestimme die Bahnen der Operation. Ist der Quotient (versehen mit der Bildtopologie) ein Hausdorff-Raum?

AUFGABE 7.10. Es sei R ein Integritätsbereich mit $2 \neq 0$ und $r \in R$ ein Element, das keine Quadratwurzel in R besitze. Zeige, dass das Polynom $X^2 - r \in R[X]$ irreduzibel ist.

AUFGABE 7.11. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} . Zeige, dass

$$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$ -graduierte \mathbb{R} -Algebra ist.

AUFGABE 7.12. Es sei R ein kommutativer Ring mit $2 \in R^\times$, auf dem die Gruppe $\mathbb{Z}/(2)$ als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass man R mit einer $\mathbb{Z}/(2)$ -Graduierung versehen kann derart, dass die neutrale Stufe der Invariantenring ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 7.13. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D -graduierte kommutative K -Algebra. Es sei

$$\varphi: A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^\vee$ gibt mit $\varphi = \varphi_\chi$, wobei φ_χ der gemäß Lemma 7.9 zu χ gehörige Automorphismus ist.

AUFGABE 7.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und

$$\delta: \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Bestimme die neutrale Stufe von $K[X, Y]$ zur Graduierung, die durch $\text{grad}(X_1) = \delta(e_1)$ und $\text{grad}(X_2) = \delta(e_2)$ gegeben ist.

AUFGABE 7.15. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und R eine kommutative D -graduierte K -Algebra. Es sei $G = D^\vee$ mit der natürlichen Operation auf R . Zeige, dass $d \in D$ einen Charakter λ auf G definiert derart, dass (unter geeigneten Voraussetzungen an D und K) die Menge der Semiinvarianten bezüglich λ gerade die d -te Stufe der Graduierung ist.

AUFGABE 7.16. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Polynom

$$XY - Z^n$$

irreduzibel ist.