Dr. A. Kaid **Osnabrück SS 2010**

Wiederholertutorium Mathematik I

Aufgabenblatt 13

Wiederholungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Überprüfe die Folge $x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 13.2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$x_0 := x, x_1 := y, x_n := \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \text{ für } n \geq 2,$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

Aufgabe 13.3. Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n .$$

Aufgabe 13.4. Untersuche die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mid (x+1)^3(x-1) \mid$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimme (falls möglich) die Ableitung.

Aufgabe 13.5. Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch $f(x,y,z) = (x+2z, y-z, x+y, 2x+3z)$.

(1) Bestimme die zu f korrespondierende Matrix A. Ist f injektiv?
(2) Sei $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne $A_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$.

AUFGABE 13.6. Betrachte die Matrix $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Untersuche ob A diagonalisierbar ist in Abhängigkeit von $\mathbb{K}$ (d.h., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Falls ja, so gebe eine invertierbare Matrix C und eine Diagonalmatrix D mit $D = C^{-1}AC$ an.