Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 18

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x .$$
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} .$$
(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 .$$

Aufgabe 18.2. Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 18.3. Zeige, dass der Tangens hyperbolicus die Abschätzungen
$$-1 \leq \tanh x \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$
erfüllt.

Aufgabe 18.4. Beweise elementargeometrisch den Sinussatz, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$
gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

Aufgabe 18.5. Bestimme die Determinanten von ebenen und von räumlichen Drehungen.

Aufgabe 18.6. Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe 18.7. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 18.8.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 18.9. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Die nächste Aufgabe verwendet die Definition einer *periodischen Funktion.*

Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 18.10. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 18.11. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.12. (3 Punkte)

Zeige, dass in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ des Kosinus hyperbolicus die Koeffizienten c_n gleich 0 sind für ungerades n.

Aufgabe 18.13. (6 Punkte)

Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die Drehung des Raumes um die z-Achse um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Wie sieht die beschreibende Matrix bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aus?

Aufgabe 18.15. (5 Punkte)

Beweise das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

für den Sinus unter Bezug auf die definierenden Potenzreihen.

Aufgabe 18.16. (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Aufgabe 18.17. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

Abbildungsverzeichnis