Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück SS 2012

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 47

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 47.1. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für Funktionen in einer Variablen ab.

Aufgabe 47.2. Leite aus der allgemeinen Kettenregel die Kettenregel für differenzierbare Kurven (für eine differenzierbare Kurve $f\colon J \to V$ und eine differenzierbare Umparametrisierung $h\colon I \to J$) ab.

Aufgabe 47.3. Bestätige die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u,v) \longmapsto (u^2v^2, u + \sin v\,, v^3),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (x^2y - z^2, xy^2 + yz \exp x),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ in folgenden Schritten.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(5) Berechne das Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 47.4. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^m$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^k$ Abbildungen derart, dass $f(G) \subseteq D$ gilt. Es sei weiter angenommen, dass f in $P \in G$ und g in $f(P) \in D$ total differenzierbar ist. Zeige

$$\frac{\partial (g \circ f)_j}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial y_1}(f(P)), \ldots, \frac{\partial g_j}{\partial y_m}(f(P)) \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 47.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Beweise die Produktregel aus der allgemeinen Kettenregel unter Verwendung von Aufgabe 46.3.

Aufgabe 47.6. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$f, g\colon G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\ P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) \,=\, \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.7. (5 Punkte)

Wir wollen die Kettenregel anhand der beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (u, v) \longmapsto (uv, u - v, v^2),$$

und

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \longmapsto (xyz^2, y \exp(xz)),$$

und ihrer Komposition $\psi \circ \varphi$ veranschaulichen.

(1) Berechne für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das Differential $(D\varphi)_P$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(2) Berechne für einen beliebigen Punkt $Q \in \mathbb{R}^3$ das Differential $(D\psi)_Q$ mit Hilfe von partiellen Ableitungen.
(3) Berechne explizit die Komposition $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(4) Berechne direkt mit partiellen Ableitungen in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ das Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
(5) Berechne das Differential von $\psi \circ \varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe der Kettenregel und den Teilen (1) und (2).

Aufgabe 47.8. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

mit

$$f(u,v) = (u^2, uv, u - v^2)\,,$$

$$g(x,y,z) = (x + y^2 - z, x^2yz)\,,$$

und

$$h(r,s) = (r^2s, s^2)\,.$$

Berechne das totale Differential von $h \circ g \circ f$ in einem beliebigen Punkt $P = (u,v)$ auf vier verschiedene Arten.

Aufgabe 47.9. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ P \longmapsto \|\, f(P)\,\|,$$

differenzierbar ist und bestimme das totale Differential davon.

Aufgabe 47.10. (5 Punkte)

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Weiter seien $f, g\colon G \to \mathbb{R}$ zwei in $P \in G$ differenzierbare Funktionen. Wende die Kettenregel und Aufgabe 46.3 auf das Diagramm

$$G \xrightarrow{f,g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{mult}} \mathbb{R}$$

an, um zu zeigen, dass die Gleichung

$$(D(f \cdot g))_P = g(P) \cdot (Df)_P + f(P) \cdot (Dg)_P$$

gilt.