Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Probeklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Hilfsmittel: Erlaubt ist lediglich ein DinA4-Blatt (zweiseitig) mit beliebigem Inhalt. Taschenrechner oder sonstige Hilfsmittel sind nicht erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Zum Bestehen braucht man 16 Punkte und für eine Eins braucht man 32 Punkte. Es gilt die 1-Punkt-Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe beginnt bei einem Punkt. Viel Erfolg!

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von 3146 und 1515 und geben Sie eine Darstellung des ggT von 3146 und 1515 an.

Aufgabe 2. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Man gebe einen Körper der Charakteristik p an, der unendlich viele Elemente besitzt.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M, die

(1) reflexiv
(2) symmetrisch
(3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $x \in (\mathbb{Z}/(p))^\times$ eine Einheit. Es sei a die Ordnung von x in der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}/(p), +, 0)$ und es sei b die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe $((\mathbb{Z}/(p))^\times, \cdot, 1)$. Zeige, dass a und b teilerfremd sind.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche primitive Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Erläutere die Begriffe „Linksnebenklasse“, „Index“ und „Normalteiler“. Zeige, dass eine Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

(a) Bestimme für die Zahlen 3, 4 und 7 modulare Basislösungen, finde also die kleinsten positiven Zahlen, die in

$$\mathbb{Z}/(3) \times \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(7)$$

die Restetupel $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ repräsentieren.

(b) Finde mit den Basislösungen die kleinste positive Lösung x der simultanen Kongruenzen

$$x = 2 \mod 3, \ x = 3 \mod 4 \text{ und } x = 1 \mod 7\,.$$

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Betrachte die beiden Permutationen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	3	7	1	4	8	6

und

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(x)$	4	5	2	8	6	7	1	3

Berechne $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$. Bestimme die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von τ. Gebe die Zyklendarstellung von σ und von σ^3 an. Was ist die Ordnung von σ?

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Formuliere und beweise den Satz von Cayley für endliche Gruppen.

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Es sei $G \subset \mathrm{SO}_3$ eine endliche Untergruppe der Gruppe der eigentlichen linearen Isometrien des $\mathbb{R}^3$. Definiere die Begriffe „Halbachse von G“ und erläutere, wann zwei Halbachsen „äquivalent“ sind. Zu einer Halbachse H sei

$$G_H = \{g \in G : g(H) = H\}.$$

Zeige, dass zu zwei äquivalenten Halbachsen H_1 und H_2 die Gruppen G_{H_1} und G_{H_2} isomorph sind.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, R ein Ring mit $0 \neq 1$ und

$$\varphi : K \longrightarrow R$$

ein Ringhomomorphismus. Zeige direkt (ohne Bezug auf Sätze der Vorlesung), dass φ injektiv ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Beweise mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$, dass $9^{1/3}$ irrational ist.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Bestimme sämtliche komplexen Nullstellen des Polynoms

$$X^3 - 1$$

und gebe die Primfaktorzerlegung von diesem Polynom in $\mathbb{R}[X]$ und in $\mathbb{C}[X]$ an.

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 7)$ das Inverse von $3x + 4$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Die folgende Aufgabe verwendet den Begriff der algebraischen Körpererweiterung.

Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *algebraisch*, wenn jedes Element $f \in L$ algebraisch über K ist.

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige, dass dann auch $K \subseteq M$ eine algebraische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl. Zeige, dass auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z} = a - bi$ sowie der Real- und der Imaginärteil von z algebraisch sind. Man bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\,.$$

($\mathbb{A}$ bezeichnet dabei den Körper der algebraischen Zahlen.)

Aufgabe 17. (4 Punkte)

Es sei eine Gerade G gegeben, auf der zwei Punkte als 0 und 1 ausgezeichnet seien, so dass man diese Gerade mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ identifizieren kann. Es seien zwei Zahlen a und b auf G gegeben. Beschreibe, wie man die beiden Zahlen durch eine geometrische Konstruktion mit Zirkel und Lineal miteinander multiplizieren kann, so dass das Produkt wieder auf G liegt (dabei darf die Konstruktion von Parallelen und Senkrechten verwendet werden). Skizziere die Situation.

Aufgabe 18. (3 Punkte)

Beschreibe die wesentlichen mathematischen Schritte, mit denen man beweisen kann, dass die „Quadratur des Kreises“ nicht möglich ist.