Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2010**

Mathematik II

Arbeitsblatt 53

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 53.1. Sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $M = \operatorname{Abb}(T, E)$ versehen mit der Supremumsnorm. Beweise die folgenden Eigenschaften für diese „Norm“ (dabei ist der Wert ∞ erlaubt und sinnvoll zu interpretieren).

(1) $|| f || \geq 0$ für alle $f \in M$.
(2) $|| f || = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
(3) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in M$ gilt
$$|| \lambda f || = | \lambda | \cdot || f || \, .$$
(4) Für $g, f \in M$ gilt
$$|| g + f || \leq || g || + || f || \, .$$

AUFGABE 53.2. Es sei
$$C = C^0([0, 1], \mathbb{R})$$
die Menge der stetigen Funktionen, die mit der Supremumsnorm versehen sei. Skizziere zu $\epsilon > 0$ die offene und die abgeschlossene ϵ-Umgebung von einem $f \in C$.

AUFGABE 53.3. Formuliere und beweise den *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für stetige Kurven
$$g : I \longrightarrow V,$$
wobei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum sei.

AUFGABE 53.4. Wie löst man eine gewöhnliche Differentialgleichung zu einem stetigen ortsunabhängigen Vektorfeld
$$f : I \times U \longrightarrow V, \ (t, v) \longmapsto f(t, v) = g(t)?$$

Aufgabe 53.5. Sei

$$f : I \times U \longrightarrow V$$

ein Vektorfeld, das auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ eines endlichdimensionalen reellen Vektorraums definiert sei und lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Es sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit der Eigenschaft, dass für alle $t \in I$ und $P \in U \cap W$ die Beziehung $f(t, P) \in W$ gilt. Zeige, dass eine Lösung des Anfangswertproblems

$$v' = f(t, v) \text{ mit } v(t_0) = w \in U \cap W$$

ganz in W verläuft.

Die nächste Aufgabe knüpft an Aufgabe 22.21 an.

Aufgabe 53.6. Im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$ befinde sich die Pupille eines Auges (oder eine Linse) und die durch $x = -1$ bestimmte Ebene sei die Netzhaut $N \cong \mathbb{R}^2$ (oder eine Fotoplatte). Bestimme die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die das Sehen (oder Fotografieren) beschreibt (d.h. einem Punkt des Halbraumes wird durch den Lichtstrahl ein Punkt der Netzhaut zugeordnet). Ist diese Abbildung differenzierbar? Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär, wie sehen die Fasern aus?

In der speziellen Relativitätstheorie ist auf dem $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ die *Lorentz-Form*

$$\langle v, w \rangle = \langle (t, x_1, \ldots, x_n), (s, y_1, \ldots, y_n) \rangle := -c^2 ts + x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

wichtig, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese Form ist eine nicht-ausgeartete Bilinearform vom Typ $(n, 1)$. Sie erlaubt es, die „Welt“ in lichtartige, zeitartige und raumartige Vektoren aufzuteilen, und den Zusammenhang dieser fundamentalen Größen zu verstehen. Die zugehörige quadratische Form ist die Abbildung

$$\varphi : V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto -c^2 t^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

Ein Vektor $v \in V$ heißt *zeitartig*, wenn $\varphi(v) < 0$ ist, *lichtartig*, wenn $\varphi(v) = 0$ ist und *raumartig*, wenn $\varphi(v) > 0$ ist. Mathematisch setzt man im Allgemeinen $c = 1$.

Aufgabe 53.7. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x) \longmapsto -t^2 + x^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 53.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, x) \longmapsto -t^2 + x^2 + y^2.$$

Bestimme die regulären Punkte und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 53.9. (4 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (t, u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Bestimme für jedes $t \in \mathbb{R}$ die nicht-regulären Punkte des Vektorfeldes

$$f_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (u, v) \longmapsto (t^2uv, u^2 - tv^2).$$

Welche Ortspunkte sind zu keinem Zeitpunkt regulär?

Aufgabe 53.10. (3 Punkte)

Finde für das zeitunabhängige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lösungen mit $u(0) = a$ und $v(0) = b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ sind.

Aufgabe 53.11. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei $C = C^0(T, E)$ der Raum der stetigen Abbildungen von T nach E, versehen mit der Supremumsnorm. Es seien $x_1, \ldots, x_n \in T$ und $y_1, \ldots, y_n \in E$ Punkte. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{f \in C |\, f(x_1) = y_1, \ldots, f(x_n) = y_n\}$$

abgeschlossen in C ist.

Aufgabe 53.12. (4 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, und sei M ein vollständiger metrischer Raum. Sei C die Menge der stetigen Abbildungen von T nach M. Definiere eine Metrik auf C derart, dass C selbst zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Aufgabe 53.13. (4 Punkte)

Zeige, dass das Integral zu einer stetigen Kurve

$$[a, b] \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V unabhängig von der gewählten Basis ist.

AUFGABE 53.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^5 - 1, t + \sin t\,).$$

Bestimme die Komponenten dieser Abbildung bzgl. der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme mit beiden Basen das Integral dieser Kurve über $[a, b]$, und bestätige, dass die Ergebnisse übereinstimmen.

AUFGABE 53.15. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$v' = f(t, v) \text{ und } v(1) = (3, 2, 6)$$

zum ortsunabhängigen Vektorfeld

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ (t, x, y, z) \longmapsto t^3(3, 1, 4) - e^{-2t}(2, -1, 7) + (t - t^2 e^t)(0, 4, 5) + (2, 2, 2).$$